Primitives et intégration
Problème de recherche : la règle des tonneaux de Kepler

Pour une fonction f continue sur $[a;b]$, on note $m = \frac{a+b}{2}$ et on appelle **règle de Kepler** l'approximation

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx S(f) = \frac{b-a}{6}\Big(f(a)+4f(m)+f(b)\Big).$$

La mission

1. Sur $[0;2]$, comparer $S(f)$ et $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ pour $f(x)=1$, $f(x)=x$, $f(x)=x^2$, $f(x)=x^3$, puis $f(x)=x^4$.
2. En déduire que, sur $[0;2]$, la règle de Kepler donne la valeur exacte de l'intégrale de toute fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
3. Appliquer la règle à $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ et comparer avec la valeur exacte.
4. Pour améliorer la précision, on partage $[1;2]$ en n intervalles de même longueur, on applique la règle sur chacun d'eux et on additionne. Écrire une fonction Python qui renvoie cette approximation, et étudier l'erreur commise pour $n = 2$, 4 et 10.

Pour aller plus loin

Démontrer que la règle donne la valeur exacte pour tout polynôme de degré au plus 3 sur n'importe quel intervalle $[a;b]$. On pourra se ramener à l'intervalle $[-h;h]$.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !