Fonction logarithme népérien
Problème de recherche : l'âge d'Ötzi

Tout être vivant contient du carbone 14 radioactif, en proportion constante tant qu'il est vivant. Après sa mort, cette quantité diminue : la proportion de carbone 14 restant au bout de t années est

$$p(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad \text{où } \lambda \text{ est une constante positive.}$$

On sait que la **demi-vie** du carbone 14 est de 5 730 ans : au bout de 5 730 ans, il reste la moitié du carbone 14 initial.
En 1991, on découvre dans un glacier des Alpes un homme momifié, surnommé Ötzi. Ses tissus contiennent 53 % du carbone 14 d'un organisme vivant.

La mission

1. Déterminer la valeur exacte de λ.
2. Depuis combien de temps Ötzi est-il mort, environ ?
3. Les appareils de mesure ne détectent plus le carbone 14 en dessous de 1 % de la quantité initiale. Jusqu'à quel âge cette méthode permet-elle de dater ?

Pour aller plus loin

En réalité, la mesure est précise à 1 % près : la proportion mesurée est comprise entre 52 % et 54 %. Donner un encadrement de l'âge d'Ötzi. Une erreur de 1 point sur la mesure donne-t-elle une erreur de 1 % sur l'âge ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. La constante λ

$p(5\,730) = \frac{1}{2} \iff \mathrm{e}^{-5\,730\lambda} = \frac{1}{2} \iff -5\,730\lambda = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \iff \lambda = \dfrac{\ln 2}{5\,730} \approx 1{,}21 \times 10^{-4}$.

2. L'âge d'Ötzi

$\mathrm{e}^{-\lambda t} = 0{,}53 \iff -\lambda t = \ln 0{,}53 \iff t = \dfrac{-\ln 0{,}53}{\lambda} = \dfrac{5\,730 \times \ln\frac{1}{0{,}53}}{\ln 2} \approx 5\,248.$

Ötzi est mort il y a environ **5 250 ans**, soit vers 3 300 avant notre ère (âge du cuivre).

3. La limite de la méthode

p est décroissante et $p(t) \geqslant 0{,}01 \iff -\lambda t \geqslant \ln 0{,}01 \iff t \leqslant \dfrac{\ln 100}{\lambda}$, soit $t \leqslant \dfrac{5\,730 \times \ln 100}{\ln 2} \approx 38\,070$.

On peut dater jusqu'à environ **38 000 ans** (un peu plus de 6,6 demi-vies). Pour des objets plus anciens, on utilise d'autres éléments radioactifs.

Pour aller plus loin

La fonction $x \mapsto \dfrac{5\,730 \ln\frac{1}{x}}{\ln 2}$ est décroissante : $t(0{,}54) \approx 5\,094$ et $t(0{,}52) \approx 5\,406$. L'âge d'Ötzi est compris entre **5 090 et 5 410 ans** environ.

Une erreur de 1 point (sur 53) donne une erreur d'environ 160 ans (sur 5 250), soit environ 3 % : l'erreur relative est amplifiée. Les datations sont donc toujours données avec une marge d'incertitude.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Fonction ln, réciproque de l'exponentielle : $\mathrm{e}^a = b \iff a = \ln b$.
- $\ln\frac{1}{a} = -\ln a$; résolution d'équations et d'inéquations ; sens de variation.