# Suites
## Problème de recherche : le prêt étudiant

Léa emprunte 10 000 € pour financer ses études. Chaque mois, la banque ajoute au capital restant dû des intérêts de 0,5 %, puis Léa rembourse une mensualité de $R$ euros.
On note $u_n$ le capital restant dû (en euros) au bout de $n$ mois : $u_0 = 10\,000$ et $u_{n+1} = 1{,}005\,u_n - R$.

### La mission

1. Léa rembourse $R = 200$ € par mois. Au bout de combien de mois aura-t-elle tout remboursé ?
2. Quelle mensualité (arrondie à l'euro supérieur) lui permettrait de tout rembourser en 4 ans ?
3. Son frère propose de rembourser seulement 50 € par mois, « pour être tranquille ». Que se passe-t-il ? Et avec 40 € par mois ?

### Pour aller plus loin

Avec $R = 200$ €, quel est le montant total des intérêts payés par Léa ?

### Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

# Éléments de correction

## Une formule explicite

$(u_n)$ est arithmético-géométrique. Suite constante solution : $\ell = 1{,}005\ell - R \iff \ell = \dfrac{R}{0{,}005} = 200R$. On pose $v_n = u_n - 200R$ : $v_{n+1} = 1{,}005u_n - R - 200R = 1{,}005(u_n - 200R) = 1{,}005v_n$. Donc $(v_n)$ est géométrique de raison 1,005 et

$$u_n = 200R + (10\,000 - 200R) \times 1{,}005^n.$$

## 1. Avec 200 € par mois

$u_n = 40\,000 - 30\,000 \times 1{,}005^n$. Au tableau de valeurs : $u_{57} \approx 135{,}46$ et $u_{58} < 0$. Léa aura tout remboursé au bout de **58 mois** (la dernière mensualité n'est que d'environ 136 €), soit presque 5 ans.

## 2. Rembourser en 4 ans

On veut $u_{48} = 0$ : $200R + (10\,000 - 200R) \times 1{,}005^{48} = 0$, soit $200R\,(1{,}005^{48} - 1) = 10\,000 \times 1{,}005^{48}$ :

$$R = \frac{50 \times 1{,}005^{48}}{1{,}005^{48} - 1} \approx 234{,}85.$$

Il faut une mensualité de **235 €**.

## 3. Des mensualités trop faibles

— $R = 50$ : $200R = 10\,000$, donc $u_n = 10\,000$ pour tout $n$. Les 50 € remboursent exactement les intérêts du mois (0,5 % de 10 000) : **la dette ne diminue jamais**.

— $R = 40$ : $u_n = 8\,000 + 2\,000 \times 1{,}005^n$. Comme $1{,}005 > 1$, $1{,}005^n$ tend vers $+\infty$ : **la dette augmente indéfiniment**.

## Pour aller plus loin

Léa verse 57 mensualités de 200 € puis une dernière d'environ $1{,}005 \times 135{,}46 \approx 136{,}14$ € : au total environ 11 536 €. Les intérêts s'élèvent à environ **1 536 €**.

## Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Suite arithmético-géométrique : suite constante solution, suite auxiliaire géométrique.

— Limite d'une suite géométrique de raison positive ; recherche d'un seuil.