Suites
Problème de recherche : les lapins de Fibonacci et le nombre d'or

En 1202, dans son *Liber abaci*, Léonard de Pise, dit Fibonacci, pose un problème de lapins dont la solution est la suite (F_n) définie par

$$F_1 = 1, \qquad F_2 = 1 \qquad \text{et, pour tout } n \geqslant 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

On s'intéresse aux quotients $r_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ pour $n \geqslant 1$, et au **nombre d'or** $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La mission

1. Calculer les quinze premiers termes de (F_n) et les quotients r_n correspondants. Quelle conjecture peut-on faire ?
2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $r_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{r_n}$, puis que $r_n \geqslant 1$.
3. On admet que (r_n) a une limite L. Démontrer que L est solution de $L^2 = L+1$, puis que $L = \varphi$.
4. Sans admettre l'existence de la limite : démontrer que $|r_{n+1} - \varphi| \leqslant \dfrac{|r_n - \varphi|}{\varphi}$, puis que $|r_n - \varphi| \leqslant \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$. Conclure.

Pour aller plus loin

Vérifier que $\varphi^2 = \varphi + 1$, puis calculer φ^3, φ^4 et φ^5 sous la forme $a\varphi + b$. Que remarque-t-on ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !