# Statistiques à deux variables
## Problème de recherche : la troisième loi de Kepler

Voici, pour six planètes, le demi-grand axe $a$ de leur orbite (en unités astronomiques, 1 ua étant la distance moyenne Terre-Soleil) et leur période de révolution $T$ (en années) :

| Planète | Mercure | Vénus | Terre | Mars | Jupiter | Saturne |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ (ua) | 0,387 | 0,723 | 1 | 1,524 | 5,203 | 9,537 |
| $T$ (années) | 0,241 | 0,615 | 1 | 1,881 | 11,862 | 29,457 |

### La mission

1. Représenter le nuage de points $(a\,;T)$ avec un tableur. Un ajustement affine est-il adapté ?
2. On pose $X = \ln a$ et $Y = \ln T$. Représenter le nuage $(X\,;Y)$, puis déterminer l'équation de la droite d'ajustement de $Y$ en $X$ par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à $10^{-3}$).
3. En déduire une relation simple entre $T$ et $a$, puis entre $T^2$ et $a^3$.
4. Uranus, découverte en 1781, a un demi-grand axe de 19,19 ua. Estimer sa période de révolution. Faire de même pour Neptune ($a = 30{,}07$ ua).

### Pour aller plus loin

Une planète met 8 ans à faire le tour du Soleil. À quelle distance moyenne du Soleil se trouve-t-elle ?

### Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

# Éléments de correction

## 1. Le nuage initial

Les points sont très resserrés près de l'origine puis s'écartent : le nuage a une forme incurvée, un ajustement affine n'est pas adapté.

## 2. Le changement de variable

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X = \ln a$ | $-0{,}949$ | $-0{,}324$ | 0 | 0,421 | 1,649 | 2,255 |
| $Y = \ln T$ | $-1{,}423$ | $-0{,}486$ | 0 | 0,632 | 2,473 | 3,383 |

Les points $(X\,;Y)$ sont presque parfaitement alignés. Avec `=PENTE(...)` et `=ORDONNEE.ORIGINE(...)`, on obtient

$$Y = 1{,}500X + 0{,}000.$$

## 3. La loi de Kepler

$\ln T = 1{,}5 \ln a$, donc $T = \mathrm{e}^{1{,}5 \ln a} = a^{1{,}5}$. En élevant au carré : $T^2 = a^3$. Le carré de la période est proportionnel au cube du demi-grand axe (ici le coefficient vaut 1 grâce aux unités choisies).

## 4. Uranus et Neptune

Uranus : $T = 19{,}19^{1{,}5} \approx 84{,}1$ ans. Neptune : $T = 30{,}07^{1{,}5} \approx 164{,}9$ ans. Les valeurs mesurées sont d'environ 84 ans et 165 ans : le modèle prévoit très bien les planètes qui n'ont pas servi à l'établir.

## Pour aller plus loin

$T^2 = a^3$ avec $T = 8$ donne $a^3 = 64$, soit $a = 4$ ua. Cette orbite se situe entre celles de Mars et de Jupiter.

Enrichissement historique : Johannes Kepler énonce cette loi en 1619 dans *Harmonices Mundi*. Isaac Newton la démontre en 1687 à partir de sa loi de la gravitation universelle.

## Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Nuage de points, ajustement affine par la méthode des moindres carrés au tableur.

— Changement de variable $X = \ln a$, $Y = \ln T$ et retour à la variable initiale.