Arithmétique : divisibilité et congruences
Problème de recherche : quel jour serons-nous ?

Le 11 novembre 2026 est un **mercredi**.

La mission

1. Quel jour de la semaine serons-nous dans 1 000 jours ?
2. Quel jour de la semaine serons-nous dans 10^{10} jours (dix milliards de jours) ?
3. Lucie affirme : « Dans 2^n jours, quel que soit l'entier naturel n, on ne sera jamais un lundi. » A-t-elle raison ? Quels jours de la semaine peut-on obtenir ?

Pour aller plus loin

Quel jour de la semaine sera le 11 novembre 2126 ? On rappelle qu'une année est bissextile si elle est divisible par 4 mais pas par 100, ou si elle est divisible par 400.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

On numérote les jours à partir de mercredi : dans N jours, le jour de la semaine ne dépend que du reste de N modulo 7 (0 : mercredi, 1 : jeudi, 2 : vendredi, 3 : samedi, 4 : dimanche, 5 : lundi, 6 : mardi).

1. Dans 1 000 jours

$1\,000 = 7 \times 142 + 6$, donc $1\,000 \equiv 6 \pmod 7$: nous serons un **mardi**.

2. Dans 10^{10} jours

$10 \equiv 3 \pmod 7$, donc $10^{10} \equiv 3^{10} \pmod 7$. Or $3^2 = 9 \equiv 2$, $3^3 \equiv 6 \equiv -1$, donc $3^6 \equiv 1 \pmod 7$. Ainsi $3^{10} = 3^6 \times 3^3 \times 3 \equiv 1 \times (-1) \times 3 \equiv -3 \equiv 4 \pmod 7$.

Dans 10^{10} jours, nous serons un **dimanche**.

3. Dans 2^n jours

$2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$. Pour $n = 3q + r$ avec $r \in \{0, 1, 2\}$: $2^n = (2^3)^q \times 2^r \equiv 2^r \pmod 7$, donc $2^n \equiv 1$, 2 ou 4 $\pmod 7$.

Dans 2^n jours, on est donc toujours un **jeudi** ($r = 0$), un **vendredi** ($r = 1$) ou un **dimanche** ($r = 2$). **Lucie a raison** : jamais un lundi (ni un mercredi, un samedi ou un mardi).

Pour aller plus loin

Du 11 novembre 2026 au 11 novembre 2126, il y a 100 années, dont les années bissextiles qui contiennent un 29 février dans cette période : 2028, 2032, …, 2124, soit 25 années, moins 2100 (divisible par 100 mais pas par 400). Total : $100 \times 365 + 24 = 36\,524$ jours.

$36\,524 = 7 \times 5\,217 + 5$: le 11 novembre 2126 sera un **lundi**.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Division euclidienne ; congruences modulo n et compatibilité avec les puissances.
- Recherche d'une puissance congrue à 1 pour étudier les restes de a^n.