Arithmétique : divisibilité et congruences
Problème de recherche : le tour du nombre recopié

Un magicien demande à un spectateur de choisir un nombre N de trois chiffres, puis d'écrire le nombre de six chiffres obtenu en le recopiant deux fois (par exemple $N = 123$ donne 123 123). Le spectateur divise ce grand nombre par 7, puis le quotient par 11, puis le nouveau quotient par 13. Les divisions tombent toujours juste, et le résultat final est N.

La mission

1. Expliquer le tour.
2. Démontrer que $10 \equiv -1 \pmod{11}$. En déduire qu'un entier $\overline{a_n \dots a_1 a_0}$ (écrit en base 10) est congru modulo 11 à $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n$. Déterminer ainsi le reste de la division de 2 026 par 11, puis celui de 123 456 789.
3. Démontrer que $1\,000 \equiv -1 \pmod{7}$ et que $1\,000 \equiv -1 \pmod{13}$. En découpant l'écriture d'un nombre en tranches de trois chiffres à partir de la droite, énoncer un critère de divisibilité par 7 et par 13. Déterminer le reste de la division de 123 456 789 par 7, puis par 13.

Pour aller plus loin

Pour quels entiers naturels n le nombre $10^n + 1$ est-il divisible par 11 ? Par 7 ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !