Arithmétique : divisibilité et congruences
Problème de recherche : le tour du nombre recopié

Un magicien demande à un spectateur de choisir un nombre N de trois chiffres, puis d'écrire le nombre de six chiffres obtenu en le recopiant deux fois (par exemple $N = 123$ donne 123 123). Le spectateur divise ce grand nombre par 7, puis le quotient par 11, puis le nouveau quotient par 13. Les divisions tombent toujours juste, et le résultat final est N.

La mission

1. Expliquer le tour.
2. Démontrer que $10 \equiv -1 \pmod{11}$. En déduire qu'un entier $\overline{a_n \dots a_1 a_0}$ (écrit en base 10) est congru modulo 11 à $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n$. Déterminer ainsi le reste de la division de 2 026 par 11, puis celui de 123 456 789.
3. Démontrer que $1\,000 \equiv -1 \pmod{7}$ et que $1\,000 \equiv -1 \pmod{13}$. En découpant l'écriture d'un nombre en tranches de trois chiffres à partir de la droite, énoncer un critère de divisibilité par 7 et par 13. Déterminer le reste de la division de 123 456 789 par 7, puis par 13.

Pour aller plus loin

Pour quels entiers naturels n le nombre $10^n + 1$ est-il divisible par 11 ? Par 7 ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Le tour

Le nombre recopié vaut $N \times 1\,000 + N = 1\,001\,N$. Or $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$. Diviser successivement par 7, 11 et 13 revient à diviser par $1\,001$: on retrouve N, et chaque division tombe juste.

2. Le critère de divisibilité par 11

$10 = 11 - 1$, donc $10 \equiv -1 \pmod{11}$, puis par compatibilité avec les puissances $10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$. Ainsi

$$\overline{a_n \dots a_0} = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \pmod{11}.$$

— $2\,026 : 6 - 2 + 0 - 2 = 2$, donc le reste est 2 (on vérifie : $2\,026 = 11 \times 184 + 2$).

— $123\,456\,789 : 9 - 8 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = 5$, donc le reste est 5.

3. Tranches de trois chiffres

$1\,000 = 1\,001 - 1$ et $1\,001$ est un multiple de 7 et de 13 : $1\,000 \equiv -1$ modulo 7 et modulo 13. Si l'on écrit $A = t_0 + t_1 \times 1\,000 + t_2 \times 1\,000^2 + \dots$ où t_0, t_1, $t_2 \dots$ sont les tranches de trois chiffres à partir de la droite, alors

$$A \equiv t_0 - t_1 + t_2 - \dots \pmod{7} \quad \text{et} \quad \pmod{13}.$$

Critère : un entier est divisible par 7 (respectivement par 13) si et seulement si la somme alternée de ses tranches de trois chiffres l'est.

Pour $123\,456\,789$: $789 - 456 + 123 = 456$. Or $456 = 7 \times 65 + 1 = 13 \times 35 + 1$. Le reste vaut 1 dans les deux cas.

Pour aller plus loin

Modulo 11 : $10^n + 1 \equiv (-1)^n + 1$, qui vaut 0 si n est impair et 2 si n est pair. Donc 11 divise $10^n + 1$ si et seulement si n est impair.

Modulo 7 : $10 \equiv 3$, et les puissances successives de 10 sont congrues à $1, 3, 2, 6, 4, 5$, puis 1 pour $n = 6$: elles se répètent avec une période 6. On a $10^n \equiv -1 \equiv 6$ uniquement pour $n \equiv 3 \pmod{6}$. Donc 7 divise $10^n + 1$ si et seulement si $n = 6k + 3$ (par exemple $1\,001 = 10^3 + 1$).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Congruences : définition, compatibilité avec l'addition, la multiplication et les puissances.

— Reste de la division euclidienne.