Nombres complexes : point de vue algébrique
Problème de recherche : les puissances de $1+\mathrm{i}$

On s'intéresse aux puissances successives du nombre complexe $1+\mathrm{i}$: $(1+\mathrm{i})^1$, $(1+\mathrm{i})^2$, $(1+\mathrm{i})^3$, etc.

La mission

1. Calculer les premières puissances de $1+\mathrm{i}$ sous forme algébrique. Pour quels entiers $n \geqslant 1$ le nombre $(1+\mathrm{i})^n$ semble-t-il réel ?
2. Démontrer cette conjecture.
3. Existe-t-il un entier n tel que $(1+\mathrm{i})^n = 2^{2026}$? tel que $(1+\mathrm{i})^n = -2^{2026}$?

Pour aller plus loin

En développant $(1+\mathrm{i})^8$ avec la formule du binôme de Newton, calculer sans effort

$$\binom{8}{0} - \binom{8}{2} + \binom{8}{4} - \binom{8}{6} + \binom{8}{8}.$$

Que vaut de même $\binom{100}{0} - \binom{100}{2} + \binom{100}{4} - \cdots + \binom{100}{100}$?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !