Nombres complexes : point de vue algébrique
Problème de recherche : les puissances de $1+\mathrm{i}$

On s'intéresse aux puissances successives du nombre complexe $1+\mathrm{i}$: $(1+\mathrm{i})^1$, $(1+\mathrm{i})^2$, $(1+\mathrm{i})^3$, etc.

La mission

1. Calculer les premières puissances de $1+\mathrm{i}$ sous forme algébrique. Pour quels entiers $n \geqslant 1$ le nombre $(1+\mathrm{i})^n$ semble-t-il réel ?
2. Démontrer cette conjecture.
3. Existe-t-il un entier n tel que $(1+\mathrm{i})^n = 2^{2026}$? tel que $(1+\mathrm{i})^n = -2^{2026}$?

Pour aller plus loin

En développant $(1+\mathrm{i})^8$ avec la formule du binôme de Newton, calculer sans effort

$$\binom{8}{0} - \binom{8}{2} + \binom{8}{4} - \binom{8}{6} + \binom{8}{8}.$$

Que vaut de même $\binom{100}{0} - \binom{100}{2} + \binom{100}{4} - \cdots + \binom{100}{100}$?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Les premières puissances

$(1+\mathrm{i})^2 = 1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2 = 2\mathrm{i}$; $(1+\mathrm{i})^3 = 2\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = -2+2\mathrm{i}$; $(1+\mathrm{i})^4 = (2\mathrm{i})^2 = -4$;
$(1+\mathrm{i})^5 = -4-4\mathrm{i}$; $(1+\mathrm{i})^6 = -8\mathrm{i}$; $(1+\mathrm{i})^7 = 8-8\mathrm{i}$; $(1+\mathrm{i})^8 = 16$.
Conjecture : $(1+\mathrm{i})^n$ est réel **si et seulement si n est un multiple de 4**.

2. Démonstration

On écrit la division euclidienne $n = 4q+r$ avec $r \in \{0,1,2,3\}$. Comme $(1+\mathrm{i})^4 = -4$:

$$(1+\mathrm{i})^n = \big((1+\mathrm{i})^4\big)^q (1+\mathrm{i})^r = (-4)^q (1+\mathrm{i})^r.$$

$(-4)^q$ est un réel non nul ; $(1+\mathrm{i})^r$ vaut 1, $1+\mathrm{i}$, $2\mathrm{i}$ ou $-2+2\mathrm{i}$ selon que $r = 0,1,2,3$. Il n'est réel que pour $r = 0$. Donc $(1+\mathrm{i})^n$ est réel si et seulement si 4 divise n.

3. Tomber sur $\pm 2^{2026}$

Il faut $n = 4q$, et alors $(1+\mathrm{i})^n = (-4)^q = (-1)^q 2^{2q}$. On veut $2q = 2026$, soit $q = 1013$, qui est impair : $(1+\mathrm{i})^{4052} = -2^{2026}$.
Il n'existe aucun n tel que $(1+\mathrm{i})^n = 2^{2026}$, mais $(1+\mathrm{i})^{4052} = -2^{2026}$.

Pour aller plus loin

$(1+\mathrm{i})^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \mathrm{i}^k$. Les puissances paires de i valent alternativement 1 et -1 ; les impaires sont imaginaires pures. La partie réelle est donc la somme demandée, et elle vaut $\mathrm{Re}\big((1+\mathrm{i})^8\big) = 16$ (on vérifie : $1-28+70-28+1 = 16$).
De même, la somme pour 100 est $\mathrm{Re}\big((1+\mathrm{i})^{100}\big)$, avec $100 = 4\times 25$: $(1+\mathrm{i})^{100} = (-4)^{25} = -2^{50}$. La somme vaut $\mathbf{-2^{50}}$.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Forme algébrique, calcul dans $\mathbb{C}$, puissances de i, partie réelle.
- Formule du binôme de Newton dans $\mathbb{C}$.