Nombres complexes : point de vue algébrique
Problème de recherche : l'équation de Bombelli

En 1545, dans son *Ars Magna*, Jérôme Cardan publie une formule pour résoudre les équations du type $x^3 = px + q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Vers 1572, Raphaël Bombelli l'applique à l'équation

$$(E) \ : \ x^3 = 15x + 4.$$

La mission

1. Vérifier que 4 est solution de (E).
2. Démontrer que la formule de Cardan appliquée à (E) fait apparaître $\sqrt{-121}$. Pourquoi les mathématiciens de l'époque étaient-ils bloqués ?
3. Bombelli ose écrire $\sqrt{-121} = 11\mathrm{i}$, avec $\mathrm{i}^2 = -1$. Calculer $(2+\mathrm{i})^3$, puis $(2-\mathrm{i})^3$. En déduire que la formule de Cardan donne bien la solution 4, à condition de choisir convenablement les racines cubiques.
4. Déterminer les réels a et b tels que $x^3 - 15x - 4 = (x-4)(x^2+ax+b)$ pour tout réel x. En déduire toutes les solutions réelles de (E).

Pour aller plus loin

Appliquer la même démarche à l'équation $x^3 = 6x + 4$. On pourra calculer $(-1+\mathrm{i})^3$.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !