Nombres complexes : point de vue algébrique
Problème de recherche : l'équation de Bombelli

En 1545, dans son *Ars Magna*, Jérôme Cardan publie une formule pour résoudre les équations du type $x^3 = px + q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Vers 1572, Raphaël Bombelli l'applique à l'équation

$$(E) \ : \ x^3 = 15x + 4.$$

La mission

1. Vérifier que 4 est solution de (E).
2. Démontrer que la formule de Cardan appliquée à (E) fait apparaître $\sqrt{-121}$. Pourquoi les mathématiciens de l'époque étaient-ils bloqués ?
3. Bombelli ose écrire $\sqrt{-121} = 11\mathrm{i}$, avec $\mathrm{i}^2 = -1$. Calculer $(2+\mathrm{i})^3$, puis $(2-\mathrm{i})^3$. En déduire que la formule de Cardan donne bien la solution 4, à condition de choisir convenablement les racines cubiques.
4. Déterminer les réels a et b tels que $x^3 - 15x - 4 = (x-4)(x^2+ax+b)$ pour tout réel x. En déduire toutes les solutions réelles de (E).

Pour aller plus loin

Appliquer la même démarche à l'équation $x^3 = 6x + 4$. On pourra calculer $(-1+\mathrm{i})^3$.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Une solution évidente

$4^3 = 64$ et $15 \times 4 + 4 = 64 : 4$ est solution de (E).

2. Une racine impossible

Ici $p = 15$ et $q = 4$: $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = 4 - \frac{3375}{27} = 4 - 125 = -121$. La formule s'écrit

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Un carré de réel est positif : aucun réel n'a pour carré -121. Pour les mathématiciens de l'époque, la formule n'avait donc aucun sens, alors que l'équation a une solution très simple.

3. Le calcul de Bombelli

$(2+\mathrm{i})^3 = 8 + 3 \times 4 \times \mathrm{i} + 3 \times 2 \times \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 = 8 + 12\mathrm{i} - 6 - \mathrm{i} = 2 + 11\mathrm{i}$.

Le conjugué d'une puissance est la puissance du conjugué : $(2-\mathrm{i})^3 = \overline{(2+\mathrm{i})^3} = 2 - 11\mathrm{i}$.

Ainsi $2 + \sqrt{-121} = 2 + 11\mathrm{i} = (2+\mathrm{i})^3$: on peut prendre $2+\mathrm{i}$ comme racine cubique de $2 + 11\mathrm{i}$, et $2 - \mathrm{i}$ comme racine cubique de $2 - 11\mathrm{i}$. La formule donne

$$x = (2+\mathrm{i}) + (2-\mathrm{i}) = 4.$$

Les nombres « impossibles » disparaissent à la fin du calcul et l'on retrouve la solution réelle.

4. Les autres solutions

$(x-4)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a-4)x^2 + (b-4a)x - 4b$. Par identification avec $x^3 + 0x^2 - 15x - 4$: $a - 4 = 0$, $b - 4a = -15$, $-4b = -4$, d'où $a = 4$ et $b = 1$ (cohérent : $1 - 16 = -15$).

$x^2 + 4x + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 16 - 4 = 12$, d'où $x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$.

Les solutions de (E) sont $\mathbf{4}$, $\mathbf{-2 + \sqrt{3}}$ et $\mathbf{-2 - \sqrt{3}}$: trois solutions réelles, et pourtant la formule de Cardan passe par des nombres non réels.

Pour aller plus loin

Avec $p = 6$ et $q = 4$: $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = 4 - 8 = -4$, et $\sqrt{-4} = 2\mathrm{i}$. On calcule $(-1+\mathrm{i})^2 = 1 - 2\mathrm{i} - 1 = -2\mathrm{i}$, puis $(-1+\mathrm{i})^3 = -2\mathrm{i}(-1+\mathrm{i}) = 2 + 2\mathrm{i}$. De même $(-1-\mathrm{i})^3 = 2 - 2\mathrm{i}$. La formule donne $x = (-1+\mathrm{i}) + (-1-\mathrm{i}) = -2$, et en effet $(-2)^3 = -8 = 6 \times (-2) + 4$.

Puis $x^3 - 6x - 4 = (x+2)(x^2 - 2x - 2)$, d'où les deux autres solutions $1 + \sqrt{3}$ et $1 - \sqrt{3}$.

Enrichissement historique : Bombelli expose ces calculs dans son *Algebra* (1572). Il faudra attendre le XIXe siècle pour que les nombres complexes soient pleinement acceptés.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Forme algébrique, calcul dans $\mathbb{C}$, $i^2 = -1$.
— Conjugué d'une puissance.
— Factorisation d'un polynôme par une racine connue (rappel de Première pour le second degré).