Nombres complexes : point de vue algébrique
Problème de recherche : les sommes de deux carrés

On dit qu'un entier naturel n est une **somme de deux carrés** s'il existe des entiers naturels a et b tels que $n = a^2 + b^2$. Par exemple $5 = 1^2 + 2^2$ et $9 = 0^2 + 3^2$.

La mission

1. Établir la liste des entiers de 1 à 50 qui sont des sommes de deux carrés.
2. Soit a et b deux réels et $z = a + \mathrm{i}b$. Démontrer que $z\overline{z} = a^2 + b^2$. En utilisant $|zw| = |z||w|$, démontrer que pour tous réels a, b, c, d :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

3. En déduire que le produit de deux sommes de deux carrés est une somme de deux carrés. Écrire $65 = 5 \times 13$ de deux façons différentes comme somme de deux carrés.
4. Démontrer qu'un entier de la forme $4k+3$ (k entier naturel) n'est jamais une somme de deux carrés.

Pour aller plus loin

Parmi les nombres premiers inférieurs à 100, lesquels sont des sommes de deux carrés ? Quelle conjecture peut-on formuler ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !