Nombres complexes : point de vue géométrique
Problème de recherche : le triangle 1, z, z^2

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, on considère un nombre complexe z, différent de 0 et de 1, et les points

A d'affixe 1, M d'affixe z, N d'affixe z^2.

La mission

1. Pour quelles valeurs de z les points A, M et N sont-ils alignés ?
2. Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels le triangle AMN est isocèle en M.
3. Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels le triangle AMN est rectangle en M. Pour quelles valeurs de z est-il à la fois isocèle et rectangle en M ?

Pour aller plus loin

Même question 1 avec les points d'affixes 1, z et z^3.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

On utilise : $MA = |1-z| = |z-1|$, $MN = |z^2-z| = |z||z-1|$ et $AN = |z^2-1| = |z-1||z+1|$.

1. Alignement

Avec GeoGebra, on conjecture que A, M, N sont alignés lorsque M est sur l'axe réel. Preuve : $\overrightarrow{AM}$ a pour affixe $z-1 \neq 0$ et $\overrightarrow{AN}$ a pour affixe $z^2-1 = (z-1)(z+1)$. Les points sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AM}$ avec k réel, c'est-à-dire si $\dfrac{z^2-1}{z-1} = z+1$ est réel. Donc A, M, N **sont alignés si et seulement si** z **est réel**.

2. Isocèle en M

$MA = MN \iff |z-1| = |z||z-1| \iff |z| = 1$ (car $|z-1| \neq 0$).

L'ensemble cherché est le **cercle de centre** O **et de rayon 1**, privé du point A (et du point d'affixe -1, pour lequel $N = A$: il n'y a pas de triangle).

3. Rectangle en M

D'après le théorème de Pythagore, AMN est rectangle en M si et seulement si $MA^2 + MN^2 = AN^2$:

$$|z-1|^2 + |z|^2|z-1|^2 = |z-1|^2|z+1|^2 \iff 1 + |z|^2 = |z+1|^2.$$

Avec $z = x + \mathrm{i}y$: $1 + x^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2 \iff 2x = 0 \iff x = 0$.

L'ensemble cherché est **l'axe des imaginaires purs**, privé de O. Isocèle et rectangle en M : $x = 0$ et $|z| = 1$, donc $\boldsymbol{z = \mathrm{i}}$ **ou** $\boldsymbol{z = -\mathrm{i}}$. Par exemple pour $z = \mathrm{i}$: $A(1)$, $M(\mathrm{i})$, $N(-1)$.

Pour aller plus loin

$\dfrac{z^3-1}{z-1} = z^2 + z + 1 = (x^2 - y^2 + x + 1) + \mathrm{i}\,y(2x+1)$. Il est réel si et seulement si $y = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$. Les points sont alignés lorsque M est sur l'axe réel **ou sur la droite d'équation** $x = -\frac{1}{2}$ (pour $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, on a même $z^3 = 1$: $N = A$).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Affixe d'un vecteur ; module et distance : $AB = |z_B - z_A|$; module d'un produit.
- Ensembles de points définis par une condition sur les modules.