Nombres complexes : point de vue géométrique
Problème de recherche : le trésor de l'île

Un jeune homme trouve dans les papiers de son grand-père le parchemin suivant :

> *« Sur l'île se trouvent un gibet, un chêne et un pin. Pars du gibet et marche jusqu'au chêne en comptant tes pas. Au chêne, tourne d'un quart de tour à droite et fais le même nombre de pas : plante un piquet. Reviens au gibet, marche jusqu'au pin en comptant tes pas. Au pin, tourne d'un quart de tour à gauche et fais le même nombre de pas : plante un second piquet. Le trésor est au milieu des deux piquets. »*

Arrivé sur l'île, il retrouve les deux arbres, mais le gibet a disparu sans laisser de trace.
On se place dans un repère orthonormé direct où le chêne A a pour affixe -1 et le pin B pour affixe 1. On note g l'affixe (inconnue) du gibet G, P et Q les deux piquets et T le trésor.

La mission

1. Soit u un nombre complexe non nul. Justifier que $|\mathrm{i}u| = |u|$ et que $\arg(\mathrm{i}u) = \arg(u) + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Interpréter géométriquement la multiplication par i, puis par $-\mathrm{i}$.
2. Démontrer que l'affixe de P est $p = -1 - \mathrm{i}(-1-g)$, puis exprimer l'affixe q de Q en fonction de g.
3. Démontrer que le jeune homme peut retrouver le trésor. Où se trouve-t-il ?
4. Que se passerait-il si le parchemin demandait de tourner à droite aux deux arbres ?

Pour aller plus loin

Démontrer que le triangle ATB est rectangle isocèle en T, quelle que soit la position des arbres.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Multiplier par i

$|\mathrm{i}u| = |\mathrm{i}|\,|u| = |u|$ et $\arg(\mathrm{i}u) = \arg(\mathrm{i}) + \arg(u) = \frac{\pi}{2} + \arg(u)\ [2\pi]$. Le vecteur d'affixe $\mathrm{i}u$ a la même longueur que celui d'affixe u et s'en déduit par un quart de tour dans le sens direct (vers la gauche). De même, $\arg(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2}$: multiplier par $-\mathrm{i}$ fait tourner d'un quart de tour dans le sens indirect (vers la droite).

2. Les deux piquets

Le marcheur va de G à A : sa direction est celle du vecteur $\overrightarrow{GA}$, d'affixe $-1-g$. Au chêne, il tourne à droite et fait le même nombre de pas : $\overrightarrow{AP}$ s'obtient en faisant tourner $\overrightarrow{GA}$ d'un quart de tour vers la droite, donc $p-(-1) = -\mathrm{i}(-1-g)$, soit

$$p = -1-\mathrm{i}(-1-g) = -1+\mathrm{i}+\mathrm{i}g.$$

De même, $\overrightarrow{BQ}$ s'obtient en faisant tourner $\overrightarrow{GB}$ (affixe $1-g$) d'un quart de tour vers la gauche : $q = 1+\mathrm{i}(1-g) = 1+\mathrm{i}-\mathrm{i}g$.

3. Le trésor

$p+q = 2\mathrm{i}$: les termes en g se compensent. Donc $t = \frac{p+q}{2} = \mathrm{i}$, quelle que soit la position du gibet.

Le trésor est au point d'affixe i : sur la médiatrice de $[AB]$, à une distance du milieu de $[AB]$ égale à la moitié de AB, du côté où l'on a placé le sens direct. Il suffit de creuser là.

4. Deux fois à droite

On aurait alors $q = 1-\mathrm{i}(1-g)$ et $p+q = -2\mathrm{i}+2\mathrm{i}g$, d'où $t = \mathrm{i}(g-1)$: la position du trésor dépend du gibet, qui est perdu. Le trésor serait introuvable.

Pour aller plus loin

Avec les affixes a, b quelconques des arbres, le même calcul donne $p = a-\mathrm{i}(a-g)$, $q = b+\mathrm{i}(b-g)$, puis

$$t = \frac{a+b}{2} + \mathrm{i}\,\frac{b-a}{2}.$$

Alors $a-t = \frac{a-b}{2} - \mathrm{i}\frac{b-a}{2} = \frac{(a-b)(1+\mathrm{i})}{2}$ et $b-t = \frac{(b-a)(1-\mathrm{i})}{2}$. On en déduit $TA = TB = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$. De plus $\frac{a-t}{b-t} = -\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$, de module 1 et d'argument $-\frac{\pi}{2}$: l'angle en T est droit. Le triangle ATB est rectangle isocèle en T.

Enrichissement historique : cette énigme est racontée par le physicien George Gamow dans son livre *One Two Three… Infinity* (1947), pour illustrer l'intérêt des nombres complexes.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Module et argument d'un produit ; multiplication par i.
- Affixe d'un vecteur, d'un milieu ; interprétation géométrique du module et de l'argument d'un quotient.