Nombres complexes : point de vue géométrique
Problème de recherche : le cercle d'Apollonius

Dans le plan complexe, on considère les points A et B d'affixes 1 et -1. Pour un réel $k > 0$, on note $\mathscr{E}_k$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$|z-1| = k\,|z+1|, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad MA = k\,MB.$$

La mission

1. Avec GeoGebra, tracer $\mathscr{E}_k$ pour plusieurs valeurs de k (par exemple $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3). Quelle conjecture peut-on faire ?
2. Déterminer $\mathscr{E}_1$.
3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x, y réels. Démontrer que $M \in \mathscr{E}_2$ si et seulement si $\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$. En déduire la nature de $\mathscr{E}_2$. Vérifier sur l'axe réel.
4. Pour $k \neq 1$, démontrer que $\mathscr{E}_k$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon en fonction de k.

Pour aller plus loin

Démontrer que les cercles $\mathscr{E}_k$ et $\mathscr{E}_{1/k}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !