Nombres complexes : point de vue géométrique
Problème de recherche : le cercle d'Apollonius

Dans le plan complexe, on considère les points A et B d'affixes 1 et -1. Pour un réel $k > 0$, on note $\mathscr{E}_k$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$|z-1| = k\,|z+1|, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad MA = k\,MB.$$

La mission

1. Avec GeoGebra, tracer $\mathscr{E}_k$ pour plusieurs valeurs de k (par exemple $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3). Quelle conjecture peut-on faire ?
2. Déterminer $\mathscr{E}_1$.
3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x, y réels. Démontrer que $M \in \mathscr{E}_2$ si et seulement si $\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$. En déduire la nature de $\mathscr{E}_2$. Vérifier sur l'axe réel.
4. Pour $k \neq 1$, démontrer que $\mathscr{E}_k$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon en fonction de k.

Pour aller plus loin

Démontrer que les cercles $\mathscr{E}_k$ et $\mathscr{E}_{1/k}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Conjecture

Pour $k = 1$, GeoGebra trace une droite, l'axe des ordonnées. Pour $k \neq 1$, on obtient des cercles centrés sur l'axe des abscisses : ils entourent B si $k > 1$ et A si $k < 1$.

2. Le cas $k = 1$

$MA = MB$: $\mathscr{E}_1$ est la médiatrice de $[AB]$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées.

3. Le cas $k = 2$

Les deux membres de $|z-1| = 2|z+1|$ sont positifs : l'égalité équivaut à $|z-1|^2 = 4|z+1|^2$, soit

$$(x-1)^2 + y^2 = 4\big((x+1)^2 + y^2\big) \iff 3x^2 + 10x + 3 + 3y^2 = 0 \iff x^2 + \tfrac{10}{3}x + y^2 + 1 = 0.$$

Or $x^2 + \frac{10}{3}x = \left(x + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}$. L'équation devient $\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9}$.
$\mathscr{E}_2$ est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$ et de rayon $\frac{4}{3}$.
Vérification sur l'axe réel : il coupe l'axe en $x = -\frac{5}{3} \pm \frac{4}{3}$, soit $-\frac{1}{3}$ et -3. Pour $z = -\frac{1}{3}$: $|z-1| = \frac{4}{3}$ et $2|z+1| = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Pour $z = -3$: $|z-1| = 4$ et $2|z+1| = 4$.

4. Le cas général

De même, $MA = kMB$ équivaut à $(x-1)^2 + y^2 = k^2\big((x+1)^2 + y^2\big)$, soit

$$(1-k^2)(x^2+y^2) - 2(1+k^2)x + (1-k^2) = 0.$$

Pour $k \neq 1$, on divise par $1 - k^2 \neq 0$ et on pose $c = \frac{1+k^2}{1-k^2}$:

$$x^2 - 2cx + y^2 + 1 = 0 \iff (x-c)^2 + y^2 = c^2 - 1.$$

Or $c^2 - 1 = \frac{(1+k^2)^2 - (1-k^2)^2}{(1-k^2)^2} = \frac{4k^2}{(1-k^2)^2} > 0$.

$\mathscr{E}_k$ est le cercle de centre le point d'affixe $\dfrac{1+k^2}{1-k^2}$ et de rayon $\dfrac{2k}{|1-k^2|}$. Pour $k = 2$, on retrouve le centre $-\frac{5}{3}$ et le rayon $\frac{4}{3}$.

Pour aller plus loin

En remplaçant k par $\frac{1}{k}$: $\frac{1+1/k^2}{1-1/k^2} = \frac{k^2+1}{k^2-1} = -c$, et le rayon $\frac{2/k}{|1-1/k^2|} = \frac{2k}{|k^2-1|}$ est inchangé. Les deux cercles ont des centres opposés sur l'axe réel et le même rayon : ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. C'était prévisible : $MA = \frac{1}{k}MB$ équivaut à $MB = kMA$, on a simplement échangé les rôles de A et B.
Enrichissement historique : ces cercles sont étudiés par Apollonius de Perge (IIIe siècle avant notre ère) ; on les appelle les cercles d'Apollonius.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Module et distance : $MA = |z - z_A|$.
- Ensembles de points définis par une condition sur des modules.