Nombres complexes : forme exponentielle
Problème de recherche : trigonométrie sans formulaire

On ne dispose d'aucun formulaire de trigonométrie : seulement les valeurs remarquables (cosinus et sinus de 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$) et la forme exponentielle des nombres complexes.

La mission

1. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ (l'angle de 15°). On pourra remarquer que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.
2. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$, pour tout réel θ.
3. En déduire que $\cos\frac{\pi}{9}$ (le cosinus de 20°) est solution de l'équation $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

Pour aller plus loin

À l'aide des formules d'Euler, écrire $\cos^3\theta$ comme une somme de termes de la forme $a\cos(k\theta)$, puis calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta$.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{12}$

$e^{i\pi/12} = e^{i\pi/3} \times e^{-i\pi/4} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+i\sqrt{3})(1-i) = \frac{\sqrt{2}}{4}\big((1+\sqrt{3})+i(\sqrt{3}-1)\big)$.
En identifiant parties réelles et imaginaires :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}966, \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}259.$$

2. $\cos(3\theta)$

Formule de Moivre : $\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$. On note $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$ et on développe :

$$(c+is)^3 = c^3 + 3ic^2 s - 3cs^2 - is^3.$$

Partie réelle : $\cos(3\theta) = c^3 - 3cs^2 = c^3 - 3c(1-c^2)$, soit $\boxed{\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta}$.

3. Une équation pour $\cos\frac{\pi}{9}$

Avec $\theta = \frac{\pi}{9}$: $3\theta = \frac{\pi}{3}$, donc $4c^3 - 3c = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, puis en multipliant par 2 : $8c^3 - 6c - 1 = 0$. $\cos\frac{\pi}{9}$ **est bien solution** de $8x^3 - 6x - 1 = 0$ (vérification : $\cos\frac{\pi}{9} \approx 0{,}9397$ et $8 \times 0{,}9397^3 - 6 \times 0{,}9397 - 1 \approx 0$).

Remarque (enrichissement) : cette équation de degré 3 n'a pas de solution « simple » ; c'est lié à l'impossibilité de partager un angle en trois à la règle et au compas (Wantzel, 1837).

Pour aller plus loin

Euler : $\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}}{8} = \frac{\cos(3\theta)+3\cos\theta}{4}$.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\,d\theta = \left[\frac{\sin(3\theta)}{12} + \frac{3\sin\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3}.$$

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Forme exponentielle ; $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$; formule de Moivre.
- Formules d'Euler et linéarisation.