Nombres complexes : forme exponentielle
Problème de recherche : une somme de cosinus étonnante

On souhaite calculer

$$S = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}.$$

On pose $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/7}$.

La mission

1. Donner une valeur approchée de S et formuler une conjecture.
2. Démontrer que $-\cos\frac{2\pi}{7} = \cos\frac{5\pi}{7}$, puis que S est la partie réelle de $z + z^3 + z^5$.
3. Calculer z^7. En utilisant une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, démontrer que $z + z^3 + z^5 = \dfrac{1}{1-z}$.
4. Soit $\theta \in]0;2\pi[$. Démontrer que $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = -2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$, puis que la partie réelle de $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ est égale à $\dfrac{1}{2}$.
5. Conclure.

Pour aller plus loin

Démontrer de même que $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$. Quelle généralisation peut-on proposer ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Conjecture

La calculatrice donne $S \approx 0{,}900\,97 - 0{,}623\,49 + 0{,}222\,52 = 0{,}5$. On conjecture $S = \frac{1}{2}$.

2. Une partie réelle

$\cos(\pi - x) = -\cos x$, donc $\cos\frac{5\pi}{7} = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) = -\cos\frac{2\pi}{7}$. Ainsi

$$S = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/7} + \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/7} + \mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/7}\right) = \mathrm{Re}(z + z^3 + z^5).$$

3. Une somme géométrique

$z^7 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$. Les nombres z, z^3, z^5 sont des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $z^2 \neq 1$; le terme suivant est z^7. Donc

$$z + z^3 + z^5 = \frac{z^7 - z}{z^2 - 1} = \frac{-1 - z}{(z-1)(z+1)} = \frac{-1}{z-1} = \frac{1}{1-z}$$

(on a simplifié par $z + 1 \neq 0$).

4. L'angle moitié

$1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\left(-2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)$ d'après la formule d'Euler. Comme $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$ pour $\theta \in]0;2\pi[$:

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}}{-2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\mathrm{i}\left(\cos\frac{\theta}{2} - \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2} \times \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

(On a utilisé $\frac{1}{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$.) La partie réelle vaut $\frac{1}{2}$.

5. Conclusion

Avec $\theta = \frac{\pi}{7}$: $S = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}$. La conjecture est démontrée.

Pour aller plus loin

Avec $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/5}$, $z^5 = -1$ et $\cos\frac{3\pi}{5} = -\cos\frac{2\pi}{5}$, d'où

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \mathrm{Re}(z + z^3) = \mathrm{Re}\left(\frac{z^5 - z}{z^2 - 1}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}.$$

Généralisation : pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \cdots + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2},$$

avec la même démonstration et $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/(2n+1)}$, qui vérifie $z^{2n+1} = -1$.

Enrichissement historique : l'égalité de départ est le problème 5 des Olympiades internationales de mathématiques de 1963, organisées en Pologne.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Forme exponentielle, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$.
- Formules d'Euler ; méthode de l'angle moitié.
- Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique (rappel de Première).