Nombres complexes : forme exponentielle
Problème de recherche : les battements

La mission

1. Soit p et q deux réels. En factorisant $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}$ par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q)/2}$, démontrer que

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}.$$

2. Avec GeoGebra, tracer la courbe de la fonction $f : x \mapsto \cos(10x) + \cos(11x)$ sur $[0;20]$. Décrire son allure.

3. Écrire $f(x)$ comme un produit, puis expliquer l'allure de la courbe. Tracer les courbes des fonctions $x \mapsto 2\cos\frac{x}{2}$ et $x \mapsto -2\cos\frac{x}{2}$. Au bout de combien de temps la courbe retrouve-t-elle la même allure ?

4. Deux diapasons émettent des sons modélisés par $s_1(t) = \cos(2\pi \times 440\,t)$ et $s_2(t) = \cos(2\pi \times 442\,t)$ (t en secondes). L'oreille entend un son de fréquence 441 Hz dont le volume varie. Combien de fois par seconde ce volume s'annule-t-il ? Généraliser à deux fréquences f_1 et f_2 proches.

Pour aller plus loin

Démontrer de même que $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. La formule

$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right) = 2\cos\frac{p-q}{2}e^{i\frac{p+q}{2}}$ (formule d'Euler). En prenant les parties réelles des deux membres :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}.$$

2. L'allure de la courbe

La courbe oscille très vite (environ comme $\cos(10x)$), mais l'amplitude des oscillations varie lentement : elle passe de 2 à 0, puis remonte à 2, régulièrement. On observe des « fuseaux ».

3. Explication

Avec $p = 11x$ et $q = 10x$: $f(x) = 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{21x}{2}$. Le facteur $\cos\frac{21x}{2}$ oscille rapidement (période $\frac{4\pi}{21} \approx 0{,}6$) ; il est multiplié par $2\cos\frac{x}{2}$, qui varie lentement. La courbe reste entre les courbes de $x \mapsto 2\cos\frac{x}{2}$ et $x \mapsto -2\cos\frac{x}{2}$ (on dit qu'elles forment l'enveloppe) et les touche.

L'amplitude $\left|2\cos\frac{x}{2}\right|$ s'annule pour $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, soit $x = \pi + 2k\pi$: elle a pour période $2\pi \approx 6{,}3$. La courbe retrouve la même allure tous les 2π (les fuseaux ont une longueur 2π).

4. Les diapasons

$s_1(t)+s_2(t) = 2\cos(2\pi t)\cos(2\pi\times 441\ t)$. On entend un son de fréquence 441 Hz dont l'amplitude est $|2\cos(2\pi t)|$. Celle-ci s'annule quand $2\pi t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, soit $t = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}$: deux fois par seconde. On entend **2 battements par seconde**.

En général, $\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) = 2\cos\left(\pi(f_1 - f_2)t\right)\cos\left(\pi(f_1 + f_2)t\right)$: on entend un son de fréquence $\frac{f_1+f_2}{2}$ et l'amplitude s'annule $|f_1 - f_2|$ fois par seconde. Pour accorder un instrument sur un diapason, on le règle jusqu'à ce que les battements disparaissent.

Pour aller plus loin

$$e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p-q}{2}}\right) = 2i\sin\frac{p-q}{2}e^{i\frac{p+q}{2}}.$$

La partie réelle de $2i\sin\frac{p-q}{2}\left(\cos\frac{p+q}{2} + i\sin\frac{p+q}{2}\right)$ est $-2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$, d'où la formule.

Enrichissement : le modèle est simplifié (deux sons purs de même amplitude), mais il décrit bien ce qu'entendent les accordeurs de pianos.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Formules d'Euler ; partie réelle de la forme exponentielle.

— Formules de trigonométrie (enrichissement : formules de transformation somme-produit).