Nombres complexes : équations et polynômes
Problème de recherche : n^4+4 est-il premier ?

On s'intéresse aux nombres entiers de la forme n^4+4, où n est un entier naturel non nul : $1^4+4=5$, $2^4+4=20$, $3^4+4=85\ldots$

La mission

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4=-4$. On pourra chercher les solutions sous forme exponentielle.
2. En déduire une factorisation de z^4+4 en produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.
3. Le nombre 2026^4+4 est-il premier ? Pour quels entiers $n \geqslant 1$ le nombre n^4+4 est-il premier ?

Pour aller plus loin

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, le nombre n^4+4^n n'est pas premier. On pourra distinguer n pair et n impair, et utiliser une factorisation de a^4+4b^4.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !