# Nombres complexes : équations et polynômes
## Problème de recherche : $n^4+4$ est-il premier ?

On s'intéresse aux nombres entiers de la forme $n^4+4$, où $n$ est un entier naturel non nul : $1^4+4=5$, $2^4+4=20$, $3^4+4=85\ldots$

### La mission

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4=-4$. On pourra chercher les solutions sous forme exponentielle.
2. En déduire une factorisation de $z^4+4$ en produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.
3. Le nombre $2026^4+4$ est-il premier ? Pour quels entiers $n \geqslant 1$ le nombre $n^4+4$ est-il premier ?

### Pour aller plus loin

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, le nombre $n^4+4^n$ n'est pas premier. On pourra distinguer $n$ pair et $n$ impair, et utiliser une factorisation de $a^4+4b^4$.

### Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

# Éléments de correction

## 1. Les solutions de $z^4 = -4$

On cherche $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$. Comme $-4 = 4e^{i\pi}$, l'équation s'écrit $r^4 e^{4i\theta} = 4e^{i\pi}$, soit $r^4 = 4$ et $4\theta = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Donc $r = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, ce qui donne quatre solutions distinctes ($k = 0, 1, 2, 3$) :

$$\sqrt{2}\,e^{i\pi/4} = 1+i, \quad \sqrt{2}\,e^{3i\pi/4} = -1+i, \quad -1-i, \quad 1-i.$$

Un polynôme de degré 4 a au plus 4 racines : ce sont toutes les solutions.

## 2. Factorisation

$z^4 + 4 = (z-1-i)(z-1+i)(z+1-i)(z+1+i)$. On regroupe les racines conjuguées :

$$(z-1-i)(z-1+i) = (z-1)^2 + 1 = z^2 - 2z + 2, \qquad (z+1-i)(z+1+i) = z^2 + 2z + 2.$$

Donc $\boxed{z^4 + 4 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)}$ (on peut vérifier en développant).

## 3. $n^4 + 4$ est-il premier ?

Pour un entier $n \geqslant 1$ : $n^4+4 = (n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$, avec $n^2-2n+2 = (n-1)^2+1 \geqslant 1$ et $n^2 + 2n + 2 \geqslant 5$.

- Si $n = 1$ : $1 \times 5 = 5$, premier.
- Si $n \geqslant 2$ : $(n-1)^2 + 1 \geqslant 2$, donc $n^4 + 4$ est le produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2 : **il n'est pas premier**.

En particulier, $2026^4 + 4 = (2026^2 - 2 \times 2026 + 2)(2026^2 + 2 \times 2026 + 2) = 4\,100\,626 \times 4\,108\,730$ n'est pas premier. $n^4 + 4$ **n'est premier que pour** $n = 1$**.**

## Pour aller plus loin

Si $n \geqslant 2$ est pair, $n^4 + 4^n$ est pair et supérieur à 2 : il n'est pas premier. Si $n \geqslant 3$ est impair, $n = 2m + 1$ et $4^n = 4 \times 4^{2m} = 4b^4$ avec $b = 2^m$. Comme ci-dessus, $a^4 + 4b^4 = (a^2-2ab+2b^2)(a^2+2ab+2b^2)$, et $a^2-2ab+2b^2 = (a-b)^2+b^2 \geqslant b^2 \geqslant 4$ dès que $m \geqslant 1$. Donc $n^4 + 4^n$ n'est pas premier (identité de Sophie Germain, enrichissement).

## Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Résolution de $z^n = a$ sous forme exponentielle ; nombre de racines d'un polynôme.
- Factorisation d'un polynôme par $z - a$ ; racines conjuguées d'un polynôme à coefficients réels.