Nombres complexes : équations et polynômes
Problème de recherche : le secret du pentagone

On note $z = e^{2i\pi/5}$. Les points d'affixes 1, z, z^2, z^3, z^4 sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1.

La mission

1. Démontrer que $z^5 = 1$, puis que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.
2. On pose $w = z + \dfrac{1}{z}$. Démontrer que $w = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$.
3. Démontrer que $w^2 + w - 1 = 0$. En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.
4. En déduire la longueur exacte du côté du pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1.

Pour aller plus loin

Déterminer la valeur exacte de $\cos\dfrac{4\pi}{5}$. Démontrer que le quotient de la longueur d'une diagonale du pentagone par celle d'un côté est égal au nombre d'or $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !