Nombres complexes : équations et polynômes
Problème de recherche : le produit des cordes

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$. On note A_k le point d'affixe ω^k pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$: ce sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1. On s'intéresse au produit des longueurs des cordes issues de A_0 :

$$p_n = A_0A_1 \times A_0A_2 \times \cdots \times A_0A_{n-1}.$$

La mission

1. Avec GeoGebra, calculer p_n pour $n = 3, 4, 5, 6$. Formuler une conjecture.

2. Calculer p_3 et p_4 de manière exacte.

3. On admet que pour tout nombre complexe z :

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}).$$

Expliquer pourquoi ce résultat est plausible. En déduire que pour tout z, $1 + z + \cdots + z^{n-1} = (z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1})$, puis démontrer la conjecture.

4. Démontrer que $|1-\omega^k| = 2\sin\dfrac{k\pi}{n}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$. En déduire la valeur du produit $\sin\dfrac{\pi}{n} \times \sin\dfrac{2\pi}{n} \times \cdots \times \sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}$.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !