Nombres complexes : équations et polynômes
Problème de recherche : le produit des cordes

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$. On note A_k le point d'affixe ω^k pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$: ce sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1. On s'intéresse au produit des longueurs des cordes issues de A_0 :

$$p_n = A_0A_1 \times A_0A_2 \times \cdots \times A_0A_{n-1}.$$

La mission

1. Avec GeoGebra, calculer p_n pour $n = 3, 4, 5, 6$. Formuler une conjecture.

2. Calculer p_3 et p_4 de manière exacte.

3. On admet que pour tout nombre complexe z :

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}).$$

Expliquer pourquoi ce résultat est plausible. En déduire que pour tout z, $1 + z + \cdots + z^{n-1} = (z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1})$, puis démontrer la conjecture.

4. Démontrer que $|1-\omega^k| = 2\sin\dfrac{k\pi}{n}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$. En déduire la valeur du produit $\sin\dfrac{\pi}{n} \times \sin\dfrac{2\pi}{n} \times \cdots \times \sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}$.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Conjecture

GeoGebra donne $p_3 = 3$, $p_4 = 4$, $p_5 = 5$, $p_6 = 6$ (aux arrondis près). On conjecture $p_n = n$.

2. Les cas $n = 3$ et $n = 4$

$n = 3 : \omega = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$; $A_0A_1 = |1-\omega| = \left|\frac{3}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$, et de même $A_0A_2 = \sqrt{3}$ (symétrie par rapport à l'axe réel). Donc $p_3 = 3$.

$n = 4 : p_4 = |1 - \mathrm{i}| \times |1 + 1| \times |1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2} = 4$.

3. La démonstration

Plausibilité : $z^n - 1$ est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 1, et il admet les n racines distinctes 1, ω, …, ω^{n-1} (racines n-ièmes de l'unité). On peut le factoriser successivement par $z-1$, $z-\omega$, … ; le produit obtenu a le bon degré et le bon coefficient dominant. (La démonstration complète est un enrichissement.)

Par ailleurs $z^n - 1 = (z-1)(1 + z + \cdots + z^{n-1})$. Pour $z \neq 1$, on simplifie par $z - 1$:

$$1 + z + \cdots + z^{n-1} = (z-\omega)\cdots(z-\omega^{n-1}).$$

Les deux membres sont des polynômes égaux pour une infinité de valeurs de z : ils ont les mêmes coefficients, et l'égalité reste vraie pour $z = 1$. On obtient

$$n = (1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1}).$$

En passant aux modules ($|ab| = |a|\,|b|$) : $p_n = |1-\omega| \times \cdots \times |1-\omega^{n-1}| = n$.

4. Un produit de sinus

Avec l'angle moitié et $\theta = \frac{2k\pi}{n}$: $1 - \omega^k = 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = -2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$, donc $|1-\omega^k| = 2\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$, car $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$.

On en déduit $2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n} \times \cdots \times \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = n$, soit

$$\sin\frac{\pi}{n} \times \sin\frac{2\pi}{n} \times \cdots \times \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Vérification pour $n = 4$: $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$.

Enrichissement historique : ce résultat est lié à des travaux de Roger Cotes, publiés après sa mort dans *Harmonia Mensurarum* (1722).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Racines n-ièmes de l'unité, factorisation de $z^n - 1$ par $z - 1$.
- Module d'un produit ; méthode de l'angle moitié (chapitre précédent).