# Graphes et matrices d'adjacence
## Problème de recherche : le réseau de bus

Le réseau de bus d'une petite ville relie cinq arrêts $A$, $B$, $C$, $D$, $E$. Les tronçons directs (dans les deux sens) sont :

$$A-B, \quad A-C, \quad B-C, \quad B-D, \quad C-D, \quad D-E.$$

Un **trajet** est une suite de tronçons consécutifs ; on peut repasser par un même arrêt.

### La mission

1. Combien existe-t-il de trajets en exactement 3 tronçons allant de $A$ à $E$ ? Les décrire.
2. Combien existe-t-il de trajets en 3 tronçons qui partent d'un arrêt et y reviennent (pour l'ensemble des arrêts) ? À quoi correspondent-ils sur le plan du réseau ?
3. On appelle **distance** entre deux arrêts le nombre minimal de tronçons pour aller de l'un à l'autre. Quelle est la plus grande distance entre deux arrêts du réseau ?

### Pour aller plus loin

La mairie veut ajouter un seul tronçon pour qu'on puisse aller de n'importe quel arrêt à n'importe quel autre en au plus 2 tronçons. Quels sont les choix possibles ?

### Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

# Éléments de correction

Le réseau est un graphe non orienté d'ordre 5. Sa matrice d'adjacence (ordre $A$, $B$, $C$, $D$, $E$) et ses puissances sont :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 1. De $A$ à $E$ en 3 tronçons

Le coefficient ligne $A$, colonne $E$ de $M^3$ donne le nombre de chaînes de longueur 3 de $A$ à $E$ : **2 trajets**, $A-B-D-E$ et $A-C-D-E$.

### 2. Les trajets fermés en 3 tronçons

Ce sont les coefficients diagonaux de $M^3$ : $2+4+4+2+0 = \mathbf{12}$ trajets. Un trajet fermé en 3 tronçons parcourt un triangle (on ne peut pas faire aller-retour en un nombre impair de tronçons sans triangle). Chaque triangle donne 6 trajets (3 points de départ, 2 sens) : il y a $12 \div 6 = 2$ triangles, $ABC$ et $BCD$.

### 3. La plus grande distance

$M + M^2$ compte les trajets en 1 ou 2 tronçons : son seul coefficient nul hors diagonale est en position $(A, E)$ (et $(E, A)$). Tous les arrêts sont à distance au plus 2, sauf $A$ et $E$ ; or le coefficient $(A, E)$ de $M^3$ vaut $2 \neq 0$. La plus grande distance (le **diamètre** du graphe) est **3**, entre $A$ et $E$.

### Pour aller plus loin

Il suffit que $A$ et $E$ deviennent à distance au plus 2, sans allonger les autres distances. On teste les tronçons manquants ($A$–$D$, $A$–$E$, $B$–$E$, $C$–$E$) : chacun convient. Il y a **4 choix possibles**.

### Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Graphe non orienté, matrice d'adjacence, chaînes et chaînes fermées.
— Le coefficient $(i, j)$ de $M^n$ est le nombre de chaînes de longueur $n$ de $i$ à $j$.