Graphes et matrices d'adjacence
Problème de recherche : les six invités

On réunit des personnes. Deux personnes quelconques se connaissent ou ne se connaissent pas. On modélise la situation par un graphe complet dont les sommets sont les personnes ; chaque arête est coloriée en rouge si les deux personnes se connaissent, en bleu sinon. On appelle **triangle unicolore** trois sommets reliés deux à deux par des arêtes de la même couleur.

La mission

1. Combien d'arêtes possède le graphe complet à 6 sommets ?
2. Démontrer qu'on peut colorier les arêtes du graphe complet à 5 sommets sans faire apparaître de triangle unicolore.
3. Démontrer que, quel que soit le coloriage des arêtes du graphe complet à 6 sommets, il existe un triangle unicolore. Traduire ce résultat en termes de connaissances lors d'une fête.
4. Lors d'une fête de 6 personnes, chacune connaît exactement deux autres invités. Donner un exemple de situation et préciser le triangle unicolore.

Pour aller plus loin

Démontrer que, dans un groupe de 10 personnes, il y en a toujours 4 qui se connaissent deux à deux, ou 3 qui ne se connaissent pas deux à deux.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !