Graphes et matrices d'adjacence
Problème de recherche : les six invités

On réunit des personnes. Deux personnes quelconques se connaissent ou ne se connaissent pas. On modélise la situation par un graphe complet dont les sommets sont les personnes ; chaque arête est coloriée en rouge si les deux personnes se connaissent, en bleu sinon. On appelle **triangle unicolore** trois sommets reliés deux à deux par des arêtes de la même couleur.

La mission

1. Combien d'arêtes possède le graphe complet à 6 sommets ?
2. Démontrer qu'on peut colorier les arêtes du graphe complet à 5 sommets sans faire apparaître de triangle unicolore.
3. Démontrer que, quel que soit le coloriage des arêtes du graphe complet à 6 sommets, il existe un triangle unicolore. Traduire ce résultat en termes de connaissances lors d'une fête.
4. Lors d'une fête de 6 personnes, chacune connaît exactement deux autres invités. Donner un exemple de situation et préciser le triangle unicolore.

Pour aller plus loin

Démontrer que, dans un groupe de 10 personnes, il y en a toujours 4 qui se connaissent deux à deux, ou 3 qui ne se connaissent pas deux à deux.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

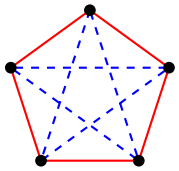
Éléments de correction

1. Nombre d'arêtes

Chaque sommet est de degré 5 ; la somme des degrés, $6 \times 5 = 30$, est le double du nombre d'arêtes : il y a **15** arêtes.

2. Avec cinq sommets

On place les cinq sommets en pentagone. Les côtés du pentagone sont en rouge, les diagonales (qui forment une étoile) en bleu.



Trois sommets du pentagone sont soit trois sommets consécutifs (deux côtés et une diagonale), soit deux consécutifs et un isolé (un côté et deux diagonales). Dans les deux cas, les trois arêtes n'ont pas la même couleur : il n'y a pas de triangle unicolore.

3. Avec six sommets

Soit A un sommet. Il est relié aux 5 autres sommets. Si au plus deux arêtes étaient rouges et au plus deux bleues, il n'y en aurait que 4 : au moins trois arêtes issues de A ont la même couleur, par exemple rouge, vers B, C et D.

— Si l'une des arêtes BC, CD, BD est rouge, par exemple BC, alors ABC est un triangle rouge.

— Sinon, BC, CD et BD sont toutes bleues : BCD est un triangle bleu.

Le cas où les trois arêtes sont bleues est identique en échangeant les couleurs. Il y a donc toujours un triangle unicolore.

Traduction : parmi six personnes, il y en a toujours trois qui se connaissent deux à deux ou trois qui ne se connaissent pas deux à deux.

4. Un exemple

Les arêtes rouges forment un graphe où chaque sommet est de degré 2. Exemple : les invités $1, 2, 3$ se connaissent deux à deux, et de même $4, 5, 6$. Il y a deux triangles rouges, 123 et 456. (Si les arêtes rouges forment un seul cycle $1-2-3-4-5-6-1$, alors 1, 3, 5 ne se connaissent pas : 135 est un triangle bleu.)

Pour aller plus loin

Soit A l'une des 10 personnes : elle est reliée à 9 autres. Il y a au moins 4 arêtes bleues ou au moins 6 arêtes rouges issues de A (sinon il y en aurait au plus $3+5=8$).

— Si A a au moins 4 voisins en bleu : si deux d'entre eux sont reliés en bleu, on a un triangle bleu avec A ; sinon, ces 4 personnes se connaissent deux à deux.

— Si A a au moins 6 voisins en rouge : parmi ces 6, d'après la question 3, il y a un triangle bleu (c'est fini) ou un triangle rouge, qui forme avec A un groupe de 4 personnes qui se connaissent deux à deux.

Enrichissement : ces questions relèvent de la théorie de Ramsey, du nom du mathématicien Frank Ramsey (article de 1930). Le résultat de la question 3 et de la question 2 s'écrit $R(3,3) = 6$; ce théorème général n'est pas au programme.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Graphe complet, degré d'un sommet, lien entre somme des degrés et nombre d'arêtes.

— Modéliser une situation par un graphe ; raisonnement par disjonction de cas.