Graphes : chaînes de Markov
Problème de recherche : la souris dans le labyrinthe

Un labyrinthe comporte quatre pièces numérotées de 1 à 4. Des couloirs relient les pièces 1 et 2, 1 et 3, 2 et 3, ainsi que 3 et 4. Toutes les minutes, une souris quitte la pièce où elle se trouve et emprunte, au hasard et de façon équiprobable, l'un des couloirs qui partent de cette pièce.
La souris est placée au départ dans la pièce 4.

La mission

1. Quelle est la probabilité que la souris soit dans la pièce 4 au bout de 2 minutes ? au bout de 3 minutes ?
2. Un biologiste affirme : « Au bout d'un long moment, la souris aura autant de chances d'être dans chacune des pièces. » A-t-il raison ?

Pour aller plus loin

On replace la souris dans la pièce 1 et on dépose un morceau de fromage dans la pièce 4. Combien de minutes faudra-t-il en moyenne à la souris pour trouver le fromage ? On pourra noter t_k le temps moyen pour atteindre la pièce 4 en partant de la pièce k.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

Modélisation

On note X_n la pièce occupée au bout de n minutes : c'est une chaîne de Markov de matrice de transition (lignes : pièce de départ)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \pi_n = \pi_0 P^n.$$

1. Au bout de 2 et 3 minutes

$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\pi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$.
La probabilité d'être dans la pièce 4 vaut $\mathbf{\frac{1}{3}}$ au bout de 2 minutes et **0** au bout de 3 minutes (depuis la pièce 4, il faut passer par la 3 et y revenir : un nombre pair de minutes).

2. À long terme

À la calculatrice, $\pi_{30} \approx \pi_{31} \approx \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}375 & 0{,}125 \end{pmatrix}$. On cherche une distribution invariante $\pi = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$ telle que $\pi P = \pi$ et $a+b+c+d = 1$:

$$a = \frac{b}{2} + \frac{c}{3}, \quad b = \frac{a}{2} + \frac{c}{3}, \quad c = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + d, \quad d = \frac{c}{3}.$$

Les deux premières donnent $a = b$, puis $a = \frac{2c}{3}$; avec $d = \frac{c}{3}$: $\frac{2c}{3} + \frac{2c}{3} + c + \frac{c}{3} = 1$, donc $c = \frac{3}{8}$, $a = b = \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{8}$.
Le biologiste a tort : à long terme, la souris est dans la pièce 3 avec une probabilité $\frac{3}{8}$, dans les pièces 1 et 2 avec une probabilité $\frac{1}{4}$, et dans la pièce 4 avec une probabilité $\frac{1}{8}$ seulement. Ces probabilités sont proportionnelles au nombre de couloirs de chaque pièce (3, 2, 2, 1 sur un total de 8).

Pour aller plus loin (enrichissement)

On a $t_4 = 0$ et, en regardant le premier déplacement : $t_1 = 1 + \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2}t_3$, $t_2 = 1 + \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_3$, $t_3 = 1 + \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_4)$. Par symétrie $t_1 = t_2$, d'où $t_1 = 2 + t_3$ et $t_3 = 1 + \frac{2}{3}t_1 = 1 + \frac{2}{3}(2 + t_3)$, soit $t_3 = 7$ et $t_1 = \mathbf{9}$ minutes en moyenne.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Graphe pondéré, chaîne de Markov, matrice de transition, $\pi_n = \pi_0 P^n$.
- Distribution invariante $\pi P = \pi$; comportement à long terme.