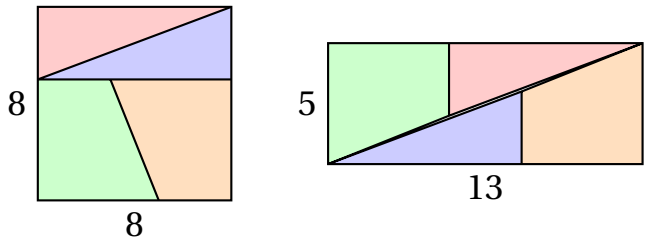
Matrices et calcul matriciel
Problème de recherche : le puzzle 64 = 65

Un carré de 8×8 carreaux est découpé en deux triangles rectangles de côtés 3 et 8 et deux trapèzes. On réassemble les quatre morceaux en un rectangle de 13×5 carreaux.



On note (F_n) la suite de Fibonacci : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La mission

1. Dans le repère d'origine le coin inférieur gauche du rectangle, démontrer que les points $O(0;0)$, $(5;2)$, $(8;3)$ et $(13;5)$ ne sont pas alignés. Expliquer le paradoxe et calculer l'aire du « trou ».
2. On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$M^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$: $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ (identité de Cassini).
4. Les nombres 3, 5, 8, 13 sont des termes consécutifs de la suite de Fibonacci. Expliquer, grâce à la question 3, pourquoi le puzzle construit sur un carré de 13×13 donne un rectangle de 21×8 dont l'aire diffère de 1. Dans quel sens ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !