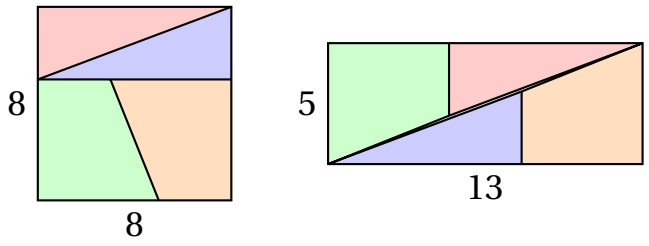
Matrices et calcul matriciel
Problème de recherche : le puzzle 64 = 65

Un carré de 8×8 carreaux est découpé en deux triangles rectangles de côtés 3 et 8 et deux trapèzes. On réassemble les quatre morceaux en un rectangle de 13×5 carreaux.



On note (F_n) la suite de Fibonacci : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La mission

1. Dans le repère d'origine le coin inférieur gauche du rectangle, démontrer que les points $O(0;0)$, $(5;2)$, $(8;3)$ et $(13;5)$ ne sont pas alignés. Expliquer le paradoxe et calculer l'aire du « trou ».
2. On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$M^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$: $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ (identité de Cassini).
4. Les nombres 3, 5, 8, 13 sont des termes consécutifs de la suite de Fibonacci. Expliquer, grâce à la question 3, pourquoi le puzzle construit sur un carré de 13×13 donne un rectangle de 21×8 dont l'aire diffère de 1. Dans quel sens ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Le trou

Le segment de O à $(8;3)$ a pour pente $\frac{3}{8} = 0{,}375$, celui de O à $(5;2)$ a pour pente $\frac{2}{5} = 0{,}4$. Les pentes sont différentes : les points ne sont pas alignés. Ce qui ressemble à la diagonale du rectangle est en réalité un parallélogramme très aplati de sommets O, $(5;2)$, $(13;5)$ et $(8;3)$, invisible à l'œil nu, laissé vide par les morceaux.

Ce parallélogramme est construit sur les vecteurs $\vec{u}(8;3)$ et $\vec{v}(5;2)$; son aire est $|8\times 2 - 3\times 5| = 1$, c'est-à-dire la valeur absolue du déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Le « carreau de plus » est exactement l'aire de ce trou : $65 - 64 = 1$.

2. Puissances de M

$M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$: la propriété est vraie au rang 1. Supposons-la vraie au rang n. Alors

$$M^{n+1} = M^n M = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1}+F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}.$$

La propriété est héréditaire ; elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

3. L'identité de Cassini

Posons $q_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$: c'est le déterminant de M^n. On a $q_1 = 1\times 0 - 1 = -1$. Pour $n \geqslant 1$, en utilisant $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$:

$$q_{n+1} = F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1}+F_n)F_n - F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) = F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = -q_n.$$

La suite (q_n) est géométrique de raison -1 et de premier terme $q_1 = -1$: $q_n = (-1)^n$.

4. Le cas général

Le puzzle construit sur un carré de côté F_n utilise des triangles de côtés F_{n-2} et F_n, et donne un rectangle de $F_{n+1} \times F_{n-1}$. La différence des aires est $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

- Carré de $8 = F_6$: $13\times 5 - 8^2 = 65 - 64 = 1 = (-1)^6$, un trou d'aire 1.
- Carré de $13 = F_7$: $21\times 8 - 13^2 = 168 - 169 = -1 = (-1)^7$. Le rectangle a un carreau de moins : les morceaux se chevauchent légèrement le long de la diagonale.

Plus les nombres sont grands, plus le défaut de 1 carreau est noyé dans une grande aire et passe inaperçu.

Enrichissement historique : l'identité porte le nom de Jean-Dominique Cassini, qui l'a publiée en 1680. Le puzzle est publié en 1868 par Oskar Schlömilch dans la revue *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, puis étudié en 1879 par Victor Schlegel, qui fait le lien avec les nombres de Fibonacci.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Produit de matrices, puissances d'une matrice carrée (démonstration par récurrence).

— Déterminant d'une matrice 2×2 (aire d'un parallélogramme : enrichissement).