Matrices et calcul matriciel
Problème de recherche : l'économie de Leontief

Une économie simplifiée comporte deux secteurs : l'énergie (E) et l'agriculture (G). Pour produire 1 million d'euros d'énergie, il faut consommer 0,2 million d'euros d'énergie et 0,4 million d'euros de produits agricoles. Pour produire 1 million d'euros de produits agricoles, il faut 0,3 million d'euros d'énergie et 0,1 million d'euros de produits agricoles.
Les consommateurs demandent en plus 120 millions d'euros d'énergie et 60 millions d'euros de produits agricoles. On note x et y les productions totales (en millions d'euros) d'énergie et de produits agricoles, et

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 120 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

La mission

1. Expliquer pourquoi la production doit vérifier $X = AX + D$. En déduire que $(I - A)X = D$.
2. Calculer $(I - A)^{-1}$, puis déterminer les productions x et y.
3. La demande en énergie augmente de 10 millions d'euros. De combien chaque production doit-elle augmenter ? Commenter.
4. On ajoute un troisième secteur. La matrice et la demande deviennent

$$A' = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \qquad D' = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les productions à l'aide d'une calculatrice ou de GeoGebra.

Pour aller plus loin

Reprendre la question 2 avec $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. Que se passe-t-il ? Interpréter.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !