Matrices et calcul matriciel
Problème de recherche : l'économie de Leontief

Une économie simplifiée comporte deux secteurs : l'énergie (E) et l'agriculture (G). Pour produire 1 million d'euros d'énergie, il faut consommer 0,2 million d'euros d'énergie et 0,4 million d'euros de produits agricoles. Pour produire 1 million d'euros de produits agricoles, il faut 0,3 million d'euros d'énergie et 0,1 million d'euros de produits agricoles.
Les consommateurs demandent en plus 120 millions d'euros d'énergie et 60 millions d'euros de produits agricoles. On note x et y les productions totales (en millions d'euros) d'énergie et de produits agricoles, et

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 120 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

La mission

1. Expliquer pourquoi la production doit vérifier $X = AX + D$. En déduire que $(I - A)X = D$.
2. Calculer $(I - A)^{-1}$, puis déterminer les productions x et y.
3. La demande en énergie augmente de 10 millions d'euros. De combien chaque production doit-elle augmenter ? Commenter.
4. On ajoute un troisième secteur. La matrice et la demande deviennent

$$A' = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \qquad D' = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les productions à l'aide d'une calculatrice ou de GeoGebra.

Pour aller plus loin

Reprendre la question 2 avec $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. Que se passe-t-il ? Interpréter.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Le modèle

L'énergie produite (x) sert aux deux secteurs, qui en consomment $0{,}2x + 0{,}3y$, et aux consommateurs (120) : $x = 0{,}2x + 0{,}3y + 120$. De même $y = 0{,}4x + 0{,}1y + 60$. Matriciellement : $X = AX + D$, soit $X - AX = D$, c'est-à-dire $(I - A)X = D$.

2. Les productions

$I - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 \\ -0{,}4 & 0{,}9 \end{pmatrix}$, de déterminant $0{,}8 \times 0{,}9 - 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}6 \neq 0$:

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}6}\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Puis $X = (I - A)^{-1}D$: $x = 1{,}5 \times 120 + 0{,}5 \times 60 = 210$ et $y = \frac{2}{3} \times 120 + \frac{4}{3} \times 60 = 160$.
Il faut produire **210** millions d'euros d'énergie et **160** millions d'euros de produits agricoles. Vérification : $0{,}2 \times 210 + 0{,}3 \times 160 + 120 = 210$.

3. Effet d'une hausse de la demande

Par linéarité, $\Delta X = (I - A)^{-1}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$: l'énergie augmente de 15 et l'agriculture d'environ 6,7 millions d'euros.
Une hausse de 10 de la demande en énergie entraîne une hausse de 15 de la production d'énergie (il faut de l'énergie pour produire de l'énergie) et une hausse de la production agricole, alors qu'on ne demande pas plus de produits agricoles : les secteurs sont interdépendants.

4. Trois secteurs

On calcule $X' = (I - A')^{-1}D'$ avec l'outil. On trouve

$$(I - A')^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1{,}280 & 0{,}358 & 0{,}222 \\ 0{,}529 & 1{,}348 & 0{,}358 \\ 0{,}461 & 0{,}529 & 1{,}280 \end{pmatrix}, \qquad X' \approx \begin{pmatrix} 163{,}7 \\ 149{,}0 \\ 174{,}9 \end{pmatrix}.$$

Dans GeoGebra : `A={{0.1,0.2,0.1},{0.3,0.1,0.2},{0.2,0.3,0.1}}`, puis `Inverse(IdentityMatrix(3)-A)*{{100},{50},{80}}`. Tous les coefficients de l'inverse sont positifs : une demande positive conduit à des productions positives.

Pour aller plus loin

$I - A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}6 \\ -0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $0{,}25 - 0{,}36 = -0{,}11$, d'où

$$(I - A)^{-1} = -\frac{1}{0{,}11}\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}5 \end{pmatrix},$$

dont tous les coefficients sont négatifs : $X = (I - A)^{-1}D$ aurait des coordonnées négatives. Cette économie est impossible : chaque secteur consomme trop (0,5 +

0,6 > 1 million d'euros de biens pour produire 1 million d'euros), elle détruit plus de richesse qu'elle n'en crée.
Enrichissement historique : ce modèle « entrées-sorties » a été développé par l'économiste Wassily Leontief à partir des années 1930. Il a reçu en 1973 le prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Modéliser une situation par une matrice ; produit d'une matrice par une colonne.
— Inverse d'une matrice 2×2, résolution d'un système linéaire $AX = B$.