Suites de matrices
Problème de recherche : trois nombres au tableau

Les nombres 0, 6 et 24 sont écrits au tableau. À chaque étape, on remplace simultanément chaque nombre par la moyenne des deux autres. On note a_n, b_n, c_n les trois nombres après n étapes et $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, avec $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix}$.

On note I la matrice identité d'ordre 3 et J la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

La mission

1. Calculer U_1, U_2 et U_3. Quelle quantité semble conservée ? Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement des trois nombres ?
2. Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout n. Vérifier que $A = \frac{1}{2}(J - I)$ et que $J^2 = 3J$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$A^n = \frac{1}{3}J + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(I - \frac{1}{3}J\right).$$
4. En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis la limite de chacune des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

Pour aller plus loin

À partir de quelle étape les trois nombres sont-ils tous à moins de 0,01 de leur limite ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Les premières étapes

$U_1 = \begin{pmatrix}15\\12\\3\end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix}7{,}5\\9\\13{,}5\end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix}11{,}25\\10{,}5\\8{,}25\end{pmatrix}$. La somme reste égale à 30 : en effet $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{2(a_n+b_n+c_n)}{2}$. Les nombres semblent se rapprocher de 10, en oscillant.

2. La matrice

$a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$, etc. : $A = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(J - I)$.

Chaque coefficient de J^2 vaut $1\times1 + 1\times1 + 1\times1 = 3$: $J^2 = 3J$.

3. Les puissances de A

Pour $n = 0$: $\frac{1}{3}J + I - \frac{1}{3}J = I = A^0$. Supposons la formule vraie au rang n et posons $c = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. On calcule

$$(J-I)J = J^2 - J = 2J \quad \text{et} \quad (J-I)\left(I - \tfrac{1}{3}J\right) = J - \tfrac{1}{3}J^2 - I + \tfrac{1}{3}J = -\left(I - \tfrac{1}{3}J\right).$$

Donc

$$A^{n+1} = A\,A^n = \frac{1}{2}(J-I)\left[\frac{1}{3}J + c\left(I - \frac{1}{3}J\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}J - c\left(I - \frac{1}{3}J\right)\right] = \frac{1}{3}J + \left(-\frac{c}{2}\right)\left(I - \frac{1}{3}J\right).$$

Comme $-\frac{c}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, la formule est vraie au rang $n+1$. Elle est vraie pour tout n.

4. Les trois suites

$U_n = A^n U_0$ et $JU_0 = \begin{pmatrix}30\\30\\30\end{pmatrix}$, donc $\frac{1}{3}JU_0 = \begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix}$ et

$$U_n = \begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix}-10\\-4\\14\end{pmatrix}.$$

On vérifie pour $n = 1$: $(10+5;10+2;10-7) = (15;12;3)$. Comme $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$: les trois suites convergent vers **10**, la moyenne des nombres de départ.

Pour aller plus loin

Les écarts à 10 valent $10\times\frac{1}{2^n}$, $4\times\frac{1}{2^n}$ et $14\times\frac{1}{2^n}$; le plus grand est $\frac{14}{2^n}$. On veut $\frac{14}{2^n} < 0{,}01$, soit $2^n > 1\,400$. Comme $2^{10} = 1\,024$ et $2^{11} = 2\,048$, c'est le cas à partir de l'**étape 11**.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Suite de matrices colonnes $U_{n+1} = AU_n$, expression $U_n = A^n U_0$.
— Calcul de A^n par récurrence ; limite d'une suite géométrique.