Arithmétique : PGCD, Bézout et Gauss
Problème de recherche : les billets du parc

Un parc de loisirs vend deux sortes de billets : le billet « enfant » à 7 € et le billet « adulte » à 11 €. Il n'y a pas d'autre tarif.

La mission

1. Un groupe a payé exactement 100 €. Combien de billets de chaque sorte a-t-il achetés ?
2. Une famille affirme avoir payé 59 €. Est-ce possible ?
3. Démontrer que tout montant entier supérieur ou égal à 60 € peut être payé exactement.

Pour aller plus loin

Avec des billets à a € et b €, où a et b sont des entiers premiers entre eux, conjecturer le plus grand montant impossible. Que se passe-t-il si a et b ne sont pas premiers entre eux, par exemple 6 € et 10 € ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Un total de 100 €

On cherche les entiers naturels x (enfants) et y (adultes) tels que $7x+11y=100$.
Une solution particulière. 7 et 11 sont premiers entre eux. Par essais : $y=4$ donne $7x=56$, $x=8$.
Toutes les solutions entières. Si $7x+11y=100$, alors $7(x-8)=11(4-y)$. Donc 11 divise $7(x-8)$; comme 11 est premier avec 7, d'après le théorème de Gauss, 11 divise $x-8$: $x=8+11k$ ($k\in\mathbb{Z}$), puis $y=4-7k$. Réciproquement, ces couples conviennent.
Nombres de billets positifs. $x\geqslant 0 \iff k\geqslant -\frac{8}{11}$ et $y\geqslant 0 \iff k\leqslant \frac{4}{7}$: seul $k=0$ convient. Le groupe a acheté **8 billets enfant et 4 billets adulte**.

2. Un total de 59 €

$11y\leqslant 59$ donc $y\in\{0;1;2;3;4;5\}$, et $59-11y$ vaut alors 59, 48, 37, 26, 15, 4 : aucun n'est multiple de 7. **La famille se trompe**, 59 € est impossible.

3. Tout montant à partir de 60 €

Les 7 montants consécutifs de 60 à 66 € sont possibles :

$$60=7\times 7+11,\ 61=7\times 4+11\times 3,\ 62=7+11\times 5,\ 63=7\times 9,$$

$$64=7\times 6+11\times 2,\ 65=7\times 3+11\times 4,\ 66=11\times 6.$$

Tout entier $N\geqslant 60$ s'écrit $N=r+7q$ avec $60\leqslant r\leqslant 66$ et $q\in\mathbb{N}$: il suffit d'ajouter q billets enfant au paiement de r. **Tout montant d'au moins 60 € peut être payé.**

Pour aller plus loin (enrichissement)
Ici $59=7\times 11-7-11$. On conjecture que le plus grand montant impossible est $ab-a-b$ (théorème de Sylvester, 1884). Si a et b ne sont pas premiers entre eux, tout montant payable est multiple de PGCD(a,b) : avec 6 € et 10 €, aucun montant impair n'est possible, il y a une infinité de montants impossibles.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Équation diophantienne $ax+by=c$; théorème de Bézout, théorème de Gauss.
- PGCD et nombres premiers entre eux.