Arithmétique : nombres premiers
Problème de recherche : le désert des nombres premiers

Pour un entier $n \geqslant 1$, on note $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ (factorielle de n).

La mission

1. Démontrer que les 100 entiers consécutifs $101!+2$, $101!+3$, …, $101!+101$ ne sont pas premiers.
2. Démontrer que pour tout entier $N \geqslant 1$, il existe N entiers consécutifs dont aucun n'est premier.
3. Déterminer le plus petit entier m tel que m, $m+1$, $m+2$, $m+3$, $m+4$ ne sont pas premiers. Faire de même pour sept entiers consécutifs. La méthode de la question 1 donne-t-elle les plus petits déserts ?
4. Démontrer pourtant qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Pour aller plus loin

On admet que pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un nombre premier p tel que $n < p < 2n$. Démontrer que, parmi les entiers de 1 à $2^{10} = 1\,024$, il y a au moins 10 nombres premiers.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !