Nombres complexes
Problème de recherche : les tensions qui ne s'additionnent pas

Un circuit est alimenté en courant alternatif sinusoïdal. Il comporte, branchés en série, une résistance, une bobine et un condensateur. Un élève mesure au voltmètre les tensions efficaces :

résistance	bobine	condensateur
$U_R = 30$ V	$U_L = 80$ V	$U_C = 40$ V

Il s'attend à mesurer $30 + 80 + 40 = 150$ V aux bornes de l'ensemble, mais le voltmètre affiche **50 V**.

Les électriciens représentent chaque tension par un nombre complexe : son module est la tension efficace et son argument est le décalage (le déphasage) de la tension par rapport au courant. Pour ce circuit :

— la tension de la résistance est en phase avec le courant : elle est représentée par $z_R = 30$;

— la tension de la bobine est en avance d'un quart de tour : $z_L = 80\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$;

— la tension du condensateur est en retard d'un quart de tour : $z_C = 40\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

La tension totale est représentée par la somme $z = z_R + z_L + z_C$.

La mission

1. Expliquer la valeur de 50 V affichée par le voltmètre.
2. Quel est le déphasage entre la tension totale et le courant (en radians, puis en degrés) ?
3. On remplace le condensateur par un autre, de sorte que la tension efficace à ses bornes change (les autres tensions ne changent pas). Quelle valeur de U_C donnerait une tension totale en phase avec le courant ? Pour quelle(s) valeur(s) de U_C le déphasage serait-il de $\frac{\pi}{4}$ en valeur absolue ?

Pour aller plus loin

Représenter z_R, z_L, z_C et z par des vecteurs du plan complexe (diagramme de Fresnel), mis bout à bout. Expliquer géométriquement pourquoi la tension totale est toujours au moins égale à U_R.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. La tension totale

Forme algébrique : $z_R = 30$, $z_L = 80\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 80\mathrm{i}$ et $z_C = 40\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -40\mathrm{i}$.
Donc $z = 30 + 80\mathrm{i} - 40\mathrm{i} = 30 + 40\mathrm{i}$, et $|z| = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2\,500} = 50$.
La tension efficace totale est le module de z : **50 V**. Les tensions de la bobine et du condensateur sont en opposition (décalées d'un demi-tour) : elles se compensent en partie.

2. Le déphasage

Un argument θ de z vérifie $\cos\theta = \frac{30}{50} = 0{,}6$ et $\sin\theta = \frac{40}{50} = 0{,}8$. Comme $\sin\theta > 0$, $\theta \in]0\,;\pi[$, et la calculatrice donne $\theta \approx 0{,}927$ rad, soit environ 53° : la tension totale est en avance sur le courant.

3. Choisir le condensateur

Avec une tension U_C quelconque : $z = 30 + (80 - U_C)\,\mathrm{i}$.
En phase : il faut un argument nul, donc z réel positif : $80 - U_C = 0$, soit $\boldsymbol{U_C} = \mathbf{80}$ V.
Alors $z = 30$: la tension totale vaut 30 V (c'est la résonance).
Déphasage de $\pm\frac{\pi}{4}$: il faut $z = r\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, c'est-à-dire partie imaginaire égale à $\pm$ partie réelle : $80 - U_C = 30$ ou $80 - U_C = -30$, soit $\boldsymbol{U_C} = \mathbf{50}$ V (avance de $\frac{\pi}{4}$) ou $\boldsymbol{U_C} = \mathbf{110}$ V (retard de $\frac{\pi}{4}$). Dans les deux cas, $|z| = 30\sqrt{2} \approx 42{,}4$ V.

Pour aller plus loin

Le vecteur de z_R est horizontal (longueur 30), ceux de z_L et z_C sont verticaux, vers le haut et vers le bas. Mis bout à bout, ils donnent un triangle rectangle dont l'hypoténuse représente z : par Pythagore, $|z|^2 = 30^2 + (80 - U_C)^2 \geqslant 30^2$. La tension totale vaut au moins $U_R = 30$ V, avec égalité à la résonance.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Passer de la forme exponentielle à la forme algébrique ; somme de complexes.
- Module et argument d'un nombre complexe ; interprétation géométrique.