Composition de fonctions
Problème de recherche : la courbe en S des voitures électriques

Dans un pays, la part (en %) des voitures électriques parmi les voitures neuves vendues est modélisée, t années après 2020, par

$$f(t) = \frac{100}{1 + 49\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}} \qquad (t \geqslant 0).$$

La mission

1. Calculer $f(0)$ et la limite de f en $+\infty$. Démontrer que f est croissante. Interpréter.
2. En quelle année la moitié des voitures neuves vendues seraient-elles électriques ? Et 90 % ?
3. Démontrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $f'(t) = 0{,}3\,f(t)\left(1 - \dfrac{f(t)}{100}\right)$.
4. En déduire pour quelle part de voitures électriques la progression est la plus rapide, et la valeur de cette vitesse de progression maximale (en points par an).

Pour aller plus loin

Démontrer que la courbe de f admet le point $I(t_0\,;50)$, où t_0 est la valeur trouvée à la question 2, comme centre de symétrie, c'est-à-dire que $f(t_0+h)+f(t_0-h)=100$ pour tout h tel que $t_0 - h \geqslant 0$.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Début, fin et sens de variation

$f(0) = \frac{100}{50} = 2 : 2\,\%$ des ventes en 2020. Quand $t \to +\infty$, $\mathrm{e}^{-0,3t} \to 0$ donc $f(t) \to 100$.
$f = \frac{100}{v}$ avec $v(t) = 1 + 49\,\mathrm{e}^{-0,3t}$ et $v'(t) = -14,7\,\mathrm{e}^{-0,3t}$:

$$f'(t) = -\frac{100\,v'(t)}{v(t)^2} = \frac{1\,470\,\mathrm{e}^{-0,3t}}{\left(1 + 49\,\mathrm{e}^{-0,3t}\right)^2} > 0.$$

f est croissante : la part augmente et se rapproche de 100 % sans l'atteindre.

2. 50 % et 90 %

$f(t) = 50 \iff 1 + 49\,\mathrm{e}^{-0,3t} = 2 \iff \mathrm{e}^{-0,3t} = \frac{1}{49} \iff t = \frac{\ln 49}{0,3} \approx 12,97$: courant 2032, donc en **2033** sur une année entière.
$f(t) = 90 \iff 49\,\mathrm{e}^{-0,3t} = \frac{1}{9} \iff t = \frac{\ln 441}{0,3} \approx 20,3$: vers **2040**.

3. Une relation remarquable

On pose $g = 49\,\mathrm{e}^{-0,3t}$. Alors $f = \frac{100}{1+g}$ et $1 - \frac{f}{100} = \frac{g}{1+g}$, donc

$$0,3f\left(1 - \frac{f}{100}\right) = \frac{30\,g}{(1+g)^2} = \frac{1\,470\,\mathrm{e}^{-0,3t}}{\left(1 + 49\,\mathrm{e}^{-0,3t}\right)^2} = f'(t).$$

4. La progression la plus rapide

$f'(t) = \varphi(f(t))$ avec $\varphi(y) = 0,3y - 0,003y^2$, polynôme du second degré de racines 0 et 100, maximal en $y = 50$. La progression est la plus rapide quand **la moitié des ventes** sont électriques, et vaut alors $\varphi(50) = 7,5$ points par an.

Pour aller plus loin

On a $49\,\mathrm{e}^{-0,3t_0} = 1$, donc $49\,\mathrm{e}^{-0,3(t_0+h)} = \mathrm{e}^{-0,3h}$ et $49\,\mathrm{e}^{-0,3(t_0-h)} = \mathrm{e}^{0,3h}$. Avec $X = \mathrm{e}^{0,3h}$:

$$f(t_0 + h) + f(t_0 - h) = \frac{100}{1 + \frac{1}{X}} + \frac{100}{1+X} = \frac{100X}{X+1} + \frac{100}{1+X} = 100.$$

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Composée de deux fonctions et sa dérivée.
- Propriétés de l'exponentielle et du logarithme (chapitres précédents).