Équations différentielles
Problème de recherche : le moteur qui chauffe

Un moteur électrique de convoyeur démarre à la température ambiante de 20 °C. En fonctionnement, il chauffe, mais il cède aussi de la chaleur à l'air ambiant, d'autant plus qu'il est chaud. Une étude thermique montre que sa température θ (en °C), en fonction du temps t (en minutes), vérifie :

$$\theta'(t) = -0{,}02\big(\theta(t) - 20\big) + 0{,}8 \qquad \text{et} \qquad \theta(0) = 20.$$

Pour éviter toute détérioration, une protection thermique coupe le moteur dès que sa température atteint 55 °C.

La mission

1. Le moteur peut-il fonctionner en continu toute une journée ? Sinon, au bout de combien de temps la protection thermique se déclenche-t-elle ?
2. Pour mieux refroidir le moteur, on installe un ventilateur. L'équation devient

$$\theta'(t) = -a\big(\theta(t) - 20\big) + 0{,}8 \qquad \text{et} \qquad \theta(0) = 20,$$

où $a > 0$ dépend de la puissance du ventilateur. Quelle valeur minimale de a faut-il choisir pour que le moteur puisse fonctionner en continu sans jamais déclencher la protection ?

Pour aller plus loin

Sans ventilateur, appliquer la méthode d'Euler avec un pas de 10 minutes pour estimer $\theta(30)$. Comparer avec la valeur exacte : la méthode d'Euler surestime-t-elle ou sous-estime-t-elle la température ? Pourquoi ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !