Équations différentielles
Problème de recherche : le moteur qui chauffe

Un moteur électrique de convoyeur démarre à la température ambiante de 20 °C. En fonctionnement, il chauffe, mais il cède aussi de la chaleur à l'air ambiant, d'autant plus qu'il est chaud. Une étude thermique montre que sa température θ (en °C), en fonction du temps t (en minutes), vérifie :

$$\theta'(t) = -0{,}02\big(\theta(t) - 20\big) + 0{,}8 \qquad \text{et} \qquad \theta(0) = 20.$$

Pour éviter toute détérioration, une protection thermique coupe le moteur dès que sa température atteint 55 °C.

La mission

1. Le moteur peut-il fonctionner en continu toute une journée ? Sinon, au bout de combien de temps la protection thermique se déclenche-t-elle ?
2. Pour mieux refroidir le moteur, on installe un ventilateur. L'équation devient

$$\theta'(t) = -a\big(\theta(t) - 20\big) + 0{,}8 \qquad \text{et} \qquad \theta(0) = 20,$$

où $a > 0$ dépend de la puissance du ventilateur. Quelle valeur minimale de a faut-il choisir pour que le moteur puisse fonctionner en continu sans jamais déclencher la protection ?

Pour aller plus loin

Sans ventilateur, appliquer la méthode d'Euler avec un pas de 10 minutes pour estimer $\theta(30)$. Comparer avec la valeur exacte : la méthode d'Euler surestime-t-elle ou sous-estime-t-elle la température ? Pourquoi ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Sans ventilateur

L'équation s'écrit $\theta' = -0{,}02\theta + 1{,}2$: elle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}02$ et $b = 1{,}2$.

Solutions : $\theta(t) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} - \dfrac{b}{a} = k\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 60$. Avec $\theta(0) = 20$: $k + 60 = 20$, donc $k = -40$.

$$\theta(t) = 60 - 40\,\mathrm{e}^{-0{,}02t}.$$

Comme $\mathrm{e}^{-0{,}02t}$ tend vers 0, la température se rapproche de **60 °C** (température d'équilibre), qui dépasse 55 °C : **le moteur ne peut pas fonctionner en continu**.

$$\theta(t) = 55 \iff 40\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} = 5 \iff \mathrm{e}^{-0{,}02t} = \frac{1}{8} \iff t = \frac{\ln 8}{0{,}02} \approx 104 \text{ min}.$$

La protection se déclenche au bout d'environ 1 h 44 min.

2. Avec ventilateur

L'équation s'écrit $\theta' = -a\theta + 20a + 0{,}8$. Solutions :

$$\theta(t) = k\,\mathrm{e}^{-at} + \frac{20a + 0{,}8}{a} = k\,\mathrm{e}^{-at} + 20 + \frac{0{,}8}{a}.$$

Avec $\theta(0) = 20$: $k = -\dfrac{0{,}8}{a}$, donc $\theta(t) = 20 + \dfrac{0{,}8}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-at}\right)$.

Comme $1 - \mathrm{e}^{-at} < 1$, la température reste toujours inférieure à la température d'équilibre $20 + \dfrac{0{,}8}{a}$, et s'en approche autant qu'on veut. Le moteur ne s'arrête jamais si et seulement si cette température d'équilibre est au plus 55 °C :

$$20 + \frac{0{,}8}{a} \leqslant 55 \iff \frac{0{,}8}{a} \leqslant 35 \iff a \geqslant \frac{0{,}8}{35} \approx 0{,}0229.$$

Il faut $a \geqslant 0{,}023$ environ, soit un coefficient d'échange augmenté d'au moins 14 % environ par rapport à 0,02.

Pour aller plus loin

Euler avec $h = 10$: $\theta_{n+1} = \theta_n + 10 \times (-0{,}02\theta_n + 1{,}2) = 0{,}8\theta_n + 12$. $\theta_0 = 20$; $\theta_1 = 28$; $\theta_2 = 34{,}4$; $\theta_3 = 39{,}52$. Valeur exacte : $\theta(30) = 60 - 40\,\mathrm{e}^{-0{,}6} \approx 38{,}05$. Euler surestime la température : la courbe est tournée vers le bas (la vitesse de chauffe diminue), et la méthode prolonge chaque fois la tangente, qui est au-dessus de la courbe.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Résoudre $y' = ay + b$ avec une condition initiale ; solution particulière constante.
- Méthode d'Euler ; logarithme pour résoudre une équation.