Équations différentielles
Problème de recherche : le colis largué par le drone

Un drone immobile en vol largue un colis de masse $m = 2$ kg muni d'un parachute. On note $v(t)$ la vitesse de chute du colis (en m/s) t secondes après le largage. La résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse, et la mécanique donne

$$v'(t) = 9{,}81 - \frac{k}{m}\, v(t), \qquad v(0) = 0,$$

où $k > 0$ (en kg/s) dépend de la taille du parachute. Le colis supporte une vitesse d'arrivée au sol de 5 m/s au maximum.

La mission

1. Avec un petit parachute, $k = 0{,}8$. Déterminer l'expression de $v(t)$ et sa limite en $+\infty$ (la **vitesse limite**). Ce parachute convient-il ?
2. Quelle valeur minimale de k faut-il pour que la vitesse limite ne dépasse pas 5 m/s ?
3. On choisit $k = 4$. Au bout de combien de temps la vitesse atteint-elle 95 % de la vitesse limite ?

Pour aller plus loin

Avec $k = 4$, le drone largue le colis à 50 m de hauteur. La distance parcourue au bout de t secondes est $x(t) = \int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s$. Au bout de combien de temps (au dixième de seconde près) le colis touche-t-il le sol ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Le petit parachute

Avec $k = 0{,}8$ et $m = 2$: $v' = -0{,}4v + 9{,}81$. C'est une équation $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}4$, $b = 9{,}81$; ses solutions sont $v(t) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}4t} - \frac{b}{a} = C\,\mathrm{e}^{-0{,}4t} + 24{,}525$.
$v(0) = 0$ donne $C = -24{,}525$, donc $v(t) = 24{,}525\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}4t}\right)$.
Quand $t \to +\infty$, $\mathrm{e}^{-0{,}4t} \to 0$ et $v(t) \to 24{,}525$ m/s, soit environ 88 km/h. Ce parachute ne convient pas.

2. Le parachute minimal

Dans le cas général, $v(t) = \frac{9{,}81m}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/m}\right)$ et la vitesse limite vaut $\frac{9{,}81\times 2}{k} = \frac{19{,}62}{k}$.
$\frac{19{,}62}{k} \leqslant 5 \iff k \geqslant 3{,}924$: il faut $k \geqslant 3{,}924$ kg/s environ. Comme la vitesse reste toujours inférieure à sa limite, le colis arrive alors à moins de 5 m/s.

3. Avec $k = 4$

$v(t) = 4{,}905\left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\right)$. On cherche $1 - \mathrm{e}^{-2t} = 0{,}95$, soit $\mathrm{e}^{-2t} = 0{,}05$ et $t = \frac{\ln 20}{2} \approx 1{,}5$ s.
La vitesse se stabilise très vite.

Pour aller plus loin

Une primitive de v est $t \mapsto 4{,}905\left(t + \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2}\right)$, d'où

$$x(t) = 4{,}905\left(t - \frac{1 - \mathrm{e}^{-2t}}{2}\right).$$

Avec GeoGebra, $x(t) = 50$ pour $t \approx 10{,}7$ s. Remarque : presque toute la descente se fait à la vitesse limite ; $\frac{50}{4{,}905} \approx 10{,}2$ s, plus une demi-seconde « perdue » au démarrage.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Résolution d'une équation $y' = ay + b$ avec condition initiale.
- Comportement des solutions quand $t \to +\infty$.