Équations différentielles
Problème de recherche : le rinçage de la cuve

Une cuve industrielle contient 2 000 L d'eau dans laquelle sont dissous 40 kg d'un produit polluant. Pour la rincer, on fait entrer 100 L d'eau par minute, et on laisse sortir 100 L de mélange par minute ; un agitateur rend le mélange homogène. On note $q(t)$ la masse de polluant (en kg) dans la cuve au bout de t minutes. La cuve est considérée propre quand elle contient moins de 1 kg de polluant.

La mission

1. L'eau qui entre est pure. On admet que $q'(t) = -0{,}05\,q(t)$. Justifier le coefficient 0,05, puis déterminer $q(t)$ et le temps de rinçage nécessaire.
2. L'eau de rinçage provient en fait d'un recyclage et contient 0,2 g de polluant par litre. Expliquer pourquoi $q'(t) = -0{,}05\,q(t) + 0{,}02$, puis déterminer $q(t)$.
3. Dans ce cas, la cuve peut-elle devenir propre ? Si oui, au bout de combien de temps ? Peut-on la rincer complètement ?

Pour aller plus loin

On revient à l'eau pure. Quel débit (entrée et sortie égales) faudrait-il pour que la cuve soit propre en 30 minutes ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Rinçage à l'eau pure

Pendant une très courte durée, la cuve perd une fraction $\frac{100}{2000} = 0{,}05$ par minute de son contenu, donc de son polluant : $q' = -0{,}05q$.
Les solutions sont $q(t) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}$ et $q(0) = 40$ donne $q(t) = 40\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}$.
$q(t) < 1 \iff \mathrm{e}^{-0{,}05t} < \frac{1}{40} \iff t > \frac{\ln 40}{0{,}05} \approx 73{,}8$: il faut environ **74 minutes**.

2. Eau de rinçage recyclée

Il entre chaque minute $100 \times 0{,}2 = 20$ g$= 0{,}02$ kg de polluant, d'où le terme $+0{,}02$.
L'équation est du type $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}05$ et $b = 0{,}02$: $q(t) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}05t} - \frac{b}{a} = C\,\mathrm{e}^{-0{,}05t} + 0{,}4$. Avec $q(0) = 40$, $C = 39{,}6$ et

$$q(t) = 0{,}4 + 39{,}6\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}.$$

3. Une limite de propreté

$q(t) < 1 \iff 39{,}6\,\mathrm{e}^{-0{,}05t} < 0{,}6 \iff \mathrm{e}^{-0{,}05t} < \frac{1}{66} \iff t > \frac{\ln 66}{0{,}05} \approx 83{,}8$: la cuve devient propre au bout d'environ **84 minutes**, dix minutes de plus qu'avec de l'eau pure.
En revanche $q(t) > 0{,}4$ pour tout t, et $q(t) \to 0{,}4$: il restera toujours au moins 400 g de polluant, ce qui correspond à la concentration de l'eau de rinçage (0,2 g/L $\times 2\,000$ L).

Pour aller plus loin

Avec un débit D (en L/min), $q(t) = 40\,\mathrm{e}^{-\frac{D}{2000}t}$. On veut $q(30) = 1$: $\frac{30D}{2000} = \ln 40$, soit $D = \frac{2000 \ln 40}{30} \approx 246$ L/min, environ 2,5 fois le débit initial.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Résolution des équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$ avec condition initiale.
- Limite des solutions et interprétation.
- Résolution d'inéquations à l'aide du logarithme (chapitre précédent).