Fonctions exponentielles
Problème de recherche : le fusible tiendra-t-il ?

Un bureau d'études conçoit un circuit RLC série (résistance R, bobine d'inductance L, condensateur) alimenté par une tension continue $E = 12$ V. À la mise sous tension ($t = 0$), l'intensité du courant augmente, passe par un maximum, puis retombe vers 0.
Les ingénieurs ont choisi le condensateur pour être dans le régime dit *critique*. Dans ce cas, l'intensité (en ampères) à l'instant t (en secondes) est donnée par

$$i(t) = \frac{E}{L}\, t\, \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} \qquad \text{pour } t \geqslant 0,$$

avec R en ohms (Ω) et L en henrys (H). La capacité du condensateur doit alors valoir $C = \dfrac{4L}{R^2}$ (en farads).

Le cahier des charges

❶ Le circuit est protégé par un fusible qui fond dès que l'intensité dépasse **3 A**. Il ne doit pas fondre.

❷ **20 ms** après la mise sous tension, l'intensité doit être inférieure à **0,1 A**.

Le stock de composants

Résistances R (Ω)	2,2	3,3	4,7	6,8	10
Bobines L (mH)	10	22	47	100	

La mission

1. Quels couples $(R\,;\,L)$ respectent le cahier des charges ?
2. Parmi eux, lequel recommanderiez-vous au bureau d'études ? Argumenter.

Pour aller plus loin

On garde $R = 10$ Ω, mais on peut faire fabriquer une bobine sur mesure. Quelle est la plus grande inductance L qui respecte encore le cahier des charges ? Donner une valeur approchée au millihenry près.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

D'autres démarches sont possibles (tableur, programme Python, courbes à la calculatrice) : ce qui compte, c'est de justifier les choix.

1. Étude générale de l'intensité

Plutôt que de tester les 20 couples un par un, on étudie i pour R et L quelconques.

On pose $b = \dfrac{R}{2L} > 0$, de sorte que $i(t) = \dfrac{E}{L}\, t\, \mathrm{e}^{-bt}$.

i est un produit : $i'(t) = \dfrac{E}{L}\left(1 \times \mathrm{e}^{-bt} + t \times (-b)\mathrm{e}^{-bt}\right) = \dfrac{E}{L}\mathrm{e}^{-bt}(1-bt)$.

Comme $\dfrac{E}{L}\mathrm{e}^{-bt} > 0$, $i'(t)$ a le signe de $1-bt$: positif pour $t < \dfrac{1}{b} = \dfrac{2L}{R}$, négatif ensuite.

De plus, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} t\,\mathrm{e}^{-bt} = 0$: le courant retombe bien vers 0.

t	0	$\frac{2L}{R}$	$+\infty$
$i'(t)$	$+$	0	$-$
i	0 ↗	$i_{\max}$	↘ 0

$$i_{\max} = i\left(\frac{2L}{R}\right) = \frac{E}{L} \times \frac{2L}{R} \times \mathrm{e}^{-1} = \frac{2E}{\mathrm{e}\,R}.$$

Surprise : le pic d'intensité ne dépend pas de L, seulement de R.

2. Critère ❶ : le fusible

$$i_{\max} = \frac{24}{\mathrm{e}\,R} \leqslant 3 \iff R \geqslant \frac{8}{\mathrm{e}} \approx 2{,}94\ \Omega.$$

On élimine $R = 2{,}2\ \Omega$ ($i_{\max} \approx 4{,}01$ A) ; les autres résistances conviennent, quelle que soit la bobine.

3. Critère ❷ : 20 ms après

On calcule $i(0{,}02)$ pour les 16 couples restants (en A, arrondis) :

	$L = 10$ mH	$L = 22$ mH	$L = 47$ mH	$L = 100$ mH
$R = 3{,}3\ \Omega$	0,885	2,43	2,53	1,73
$R = 4{,}7\ \Omega$	0,218	1,29	1,88	1,50
$R = 6{,}8\ \Omega$	**0,027**	0,496	1,20	1,22
$R = 10\ \Omega$	**0,001**	0,116	0,608	0,883

Pour les deux couples retenus, le pic a lieu à $\frac{2L}{R} \approx 2{,}9$ ms et 2 ms : à $t = 20$ ms, l'intensité est déjà en train de décroître, elle restera donc sous 0,1 A.
Deux couples conviennent : (6,8 Ω ; 10 mH) et (10 Ω ; 10 mH).
Le couple (10 Ω ; 22 mH) échoue de peu (0,116 A).

4. Recommandation

Plusieurs arguments sont recevables. Par exemple, (10 Ω ; 10 mH) :

— plus grande marge sur le fusible : pic de 0,88 A contre 1,30 A ;
— régime transitoire plus court (sous 0,1 A dès 9,5 ms environ, contre 15,3 ms) ;
— condensateur plus petit, donc moins cher et moins encombrant : $C = \frac{4\times 0{,}01}{10^2} = 400\ \mu$F contre 865 μF.

Pour aller plus loin

Avec $R = 10\ \Omega$, on cherche L tel que $i(0{,}02) = \dfrac{0{,}24}{L}\mathrm{e}^{-\frac{0{,}1}{L}} < 0{,}1$. Au tableur ou par dichotomie : $L = 21$ mH donne environ 0,098 A et $L = 22$ mH donne 0,116 A. **L'inductance maximale est d'environ 21 mH** (le pic a alors lieu vers 4,2 ms, bien avant 20 ms).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Dérivée de e^{kx} et dérivée d'un produit ; étude des variations.
— Limite en $+\infty$ par croissances comparées.
— Propriétés algébriques de l'exponentielle (e^{-1}, factorisation par e^{-bt}).

Vers le supérieur (enrichissement, hors programme)

En BUT GEII ou en prépa TSI, on établit cette formule : l'intensité vérifie l'équation différentielle du second ordre $LC\,i'' + RC\,i' + i = 0$. Selon la valeur de C, le courant oscille (régime pseudo-périodique) ou non ; le régime critique, obtenu pour $C = \frac{4L}{R^2}$, est le plus rapide sans oscillation. Les valeurs 2,2 ; 3,3 ; 4,7 ; 6,8 ; 10 viennent de la série normalisée E6, utilisée par tous les fabricants de composants.