Fonctions exponentielles
Problème de recherche : le coup de foudre

Lors d'un coup de foudre, l'intensité du courant (en kiloampères) est modélisée en fonction du temps t (en microsecondes) par

$$i(t) = 40\,t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} \qquad \text{pour } t \geqslant 0.$$

La mission

1. Calculer $i(0)$, puis déterminer la limite de $i(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Interpréter.
2. Étudier les variations de i. Quelle est l'intensité maximale du courant, et à quel instant est-elle atteinte ?
3. Un parafoudre est en surcharge tant que le courant dépasse la moitié de l'intensité maximale. Pendant combien de temps (au centième de microseconde près) est-il en surcharge ?
4. Selon ce modèle, le courant redevient-il exactement nul ? Au bout de combien de temps devient-il inférieur à 1 A ?

Pour aller plus loin

La charge électrique transportée entre 0 et T microsecondes est $\displaystyle\int_0^T i(t)\,\mathrm{d}t$ (en kA·μs, c'est-à-dire en millicoulombs). Vérifier que $F(t) = -40(2t+4)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ est une primitive de i, puis calculer la charge transportée pendant les 40 premières microsecondes.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Départ et limite

$i(0) = 0$: le courant part de zéro.

$i(t) = 40 \times \dfrac{t}{\mathrm{e}^{0,5t}}$. Par croissances comparées, $\dfrac{\mathrm{e}^{0,5t}}{t}$ tend vers $+\infty$, donc $i(t)$ tend vers 0 : le courant finit par s'éteindre.

2. Variations et pic

$i'(t) = 40\,\mathrm{e}^{-0,5t} + 40t \times (-0,5)\,\mathrm{e}^{-0,5t} = (40 - 20t)\,\mathrm{e}^{-0,5t}$.

Comme $\mathrm{e}^{-0,5t} > 0$, $i'(t)$ a le signe de $40 - 20t$: i est croissante sur $[0\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;+\infty[$.

Le pic est atteint à $t = 2$ µs : $i(2) = 80\,\mathrm{e}^{-1} \approx 29{,}4$ kA.

3. La surcharge

On cherche quand $i(t) > 40\,\mathrm{e}^{-1} \approx 14{,}7$ kA. Au tableau de valeurs : la courbe franchit cette valeur en montant vers $t_1 \approx 0{,}46$ µs, et en descendant vers $t_2 \approx 5{,}36$ µs. Le parafoudre est en surcharge pendant environ $5{,}36 - 0{,}46 = 4{,}90$ µs.

4. Extinction

Pour $t > 0$, $t > 0$ et $\mathrm{e}^{-0,5t} > 0$ donc $i(t) > 0$: selon le modèle, le courant ne s'annule jamais. 1 A = 0,001 kA ; à la calculatrice, $i(t) < 0{,}001$ à partir de $t \approx 27{,}8$ µs environ (on trouve $i(27) \approx 0{,}0015$ et $i(28) \approx 0{,}000\,93$). Après une trentaine de microsecondes, le courant est négligeable.

Pour aller plus loin

$F'(t) = -80\,\mathrm{e}^{-0,5t} - 40(2t+4) \times (-0,5)\,\mathrm{e}^{-0,5t} = (-80 + 40t + 80)\,\mathrm{e}^{-0,5t} = 40t\,\mathrm{e}^{-0,5t} = i(t)$.

Charge : $F(40) - F(0) = -40 \times 84\,\mathrm{e}^{-20} + 160 \approx 160$ kA·µs, soit environ 0,16 C. Presque toute la charge est transportée pendant les 40 premières microsecondes.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Dérivée d'une fonction comportant une exponentielle, étude des variations.
- Limites et croissances comparées.
- Modélisation d'un phénomène par une fonction exponentielle.