Intégration
Problème de recherche : le freinage du tramway

Un tramway roule à 54 km/h, soit 15 m/s. À l'instant $t = 0$, il commence à freiner et s'arrête au bout de 10 secondes. Les ingénieurs comparent deux modes de freinage, qui donnent la vitesse $v(t)$ (en m/s) pour $t \in [0\,;10]$ (en s) :

— **mode A** (freinage mécanique) : $v_A(t) = 15 - 1{,}5t$;

— **mode B** (freinage électrique) : $v_B(t) = 0{,}15t^2 - 3t + 15$.

On rappelle que la distance parcourue entre les instants 0 et 10 est égale à $\displaystyle\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t$.

La mission

1. Un obstacle apparaît à 60 m devant le tramway au moment où il commence à freiner. Quel mode de freinage permet de l'éviter ?
2. Un passager affirme : « Les deux modes s'arrêtent en 10 s, donc ils ont la même vitesse moyenne. » A-t-il raison ?
3. Les ingénieurs veulent un mode C, avec une vitesse de la forme $v_C(t) = at^2 + bt + 15$, qui arrête le tramway en exactement 10 s sur une distance de **exactement 60 m**. Trouver a et b, puis vérifier que la vitesse reste positive pendant le freinage.

Pour aller plus loin

Pour le confort des passagers, la décélération (la valeur absolue de $v'(t)$) ne doit jamais dépasser 2,5 m/s². Quels modes respectent cette contrainte ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Les distances de freinage

Mode A : une primitive de v_A est $t \mapsto 15t - 0{,}75t^2$, donc $d_A = \int_0^{10} v_A(t)\,\mathrm{d}t = 150 - 75 = 75$ m.
Mode B : une primitive de v_B est $t \mapsto 0{,}05t^3 - 1{,}5t^2 + 15t$, donc $d_B = 50 - 150 + 150 = 50$ m.
Le mode A ne permet pas d'éviter l'obstacle (75 m > 60 m) ; **le mode B, oui** (50 m).

2. Les vitesses moyennes

La vitesse moyenne est la valeur moyenne de v sur $[0\,;10]$: $\frac{1}{10}\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t$. On obtient 7,5 m/s pour A et 5 m/s pour B : **le passager a tort**. Le mode B ralentit fort au début, puis plus doucement : le tramway passe plus de temps à faible vitesse.

3. Le freinage sur mesure

Arrêt en 10 s : $v_C(10) = 0$, donc $100a + 10b + 15 = 0$, soit $b = -1{,}5 - 10a$.
Distance de 60 m : $\int_0^{10} (at^2 + bt + 15)\,\mathrm{d}t = \frac{1\,000}{3}a + 50b + 150 = 60$.
En remplaçant b : $\frac{1\,000}{3}a - 75 - 500a + 150 = 60$, d'où $-\frac{500}{3}a = -15$, soit $a = 0{,}09$ et $b = -2{,}4$.
Donc $v_C(t) = 0{,}09t^2 - 2{,}4t + 15$. Sa dérivée $v_C'(t) = 0{,}18t - 2{,}4$ est négative sur $[0\,;10]$ (elle s'annule en $t \approx 13{,}3$) : v_C décroît de 15 à $v_C(10) = 0$, elle reste donc positive.

Pour aller plus loin

Mode A : $|v_A'(t)| = 1{,}5$ (constante) : contrainte respectée. Mode B : $v_B'(t) = 0{,}3t - 3$, qui vaut -3 en $t = 0$: décélération de 3 m/s² au départ, contrainte **non** respectée. Mode C : $|v_C'(t)|$ est maximale en $t = 0$ et vaut 2,4 : contrainte respectée. Le mode C est un bon compromis entre distance et confort.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Primitives de fonctions polynômes ; calcul d'intégrales.
- Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.