Intégration
Problème de recherche : la journée du panneau solaire

Une journée de printemps, le soleil se lève à 6 h et se couche à 18 h. On note t le temps écoulé (en heures) depuis le lever du soleil. La puissance électrique fournie par un panneau solaire est modélisée par

$$P(t) = 0{,}025\,t\,(12 - t) \qquad \text{(en kW, pour } t \in [0\,;12]\text{)}.$$

L'énergie produite (en kWh) entre les instants a et b est égale à $\displaystyle\int_a^b P(t)\,\mathrm{d}t$.

La mission

1. Quelle est la puissance maximale du panneau, et à quelle heure est-elle atteinte ? Quelle énergie le panneau produit-il sur toute la journée ?
2. Calculer la puissance moyenne du panneau sur la journée. Pendant combien de temps la puissance dépasse-t-elle cette valeur moyenne ?
3. Le panneau recharge une batterie de 2,4 kWh, vide au lever du soleil. À quelle heure (à la minute près) la batterie est-elle pleine ?
4. À quelle heure le panneau a-t-il produit la moitié de l'énergie de la journée ? Justifier sans calcul d'intégrale.

Pour aller plus loin

Les fabricants parlent d'« heures équivalentes » : c'est la durée pendant laquelle le panneau, fonctionnant en permanence à sa puissance maximale, produirait la même énergie que sur la journée. Calculer ce nombre d'heures.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Puissance maximale et énergie

$P(t) = 0{,}3t - 0{,}025t^2$ est un polynôme du second degré de coefficient dominant négatif; ses racines sont 0 et 12, donc son maximum est atteint en $t = 6$: $P(6) = 0{,}025 \times 6 \times 6 = 0{,}9$ kW, à midi.
Une primitive de P est $F(t) = 0{,}15t^2 - \frac{0{,}025}{3}t^3$. Énergie de la journée :

$$E = \int_0^{12} P(t)\,\mathrm{d}t = F(12) - F(0) = 21{,}6 - 14{,}4 = 7{,}2 \text{ kWh}.$$

2. Puissance moyenne

$P_{\text{moy}} = \frac{1}{12}\int_0^{12} P(t)\,\mathrm{d}t = \frac{7{,}2}{12} = 0{,}6$ kW.
$P(t) > 0{,}6 \iff 0{,}025t^2 - 0{,}3t + 0{,}6 < 0 \iff t^2 - 12t + 24 < 0$. Les racines sont $6 - \sqrt{12} \approx 2{,}54$ et $6 + \sqrt{12} \approx 9{,}46$, donc la puissance dépasse la moyenne pendant $2\sqrt{12} \approx 6{,}93$ h, soit environ 6 h 56 min.

3. La batterie pleine

L'énergie produite entre 0 et x vaut $F(x) - F(0) = 0{,}15x^2 - \frac{0{,}025}{3}x^3$. On cherche x tel que $F(x) = 2{,}4$. Avec GeoGebra (intersection de la courbe de F et de la droite $y = 2{,}4$) : $x \approx 4{,}644$ h, soit environ 4 h 39 min après le lever du soleil. La batterie est pleine vers **10 h 39**.

4. La moitié de la production

$P(12 - t) = 0{,}025(12 - t)\,t = P(t)$: la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $t = 6$. Les aires sous la courbe sur $[0\,;6]$ et sur $[6\,;12]$ sont donc égales : la moitié de l'énergie (3,6 kWh) est produite à $t = 6$, c'est-à-dire à **midi**. (Vérification : $F(6) = 5{,}4 - 1{,}8 = 3{,}6$.)

Pour aller plus loin

On cherche la durée h telle que $0{,}9 \times h = 7{,}2$, soit $h = 8$ heures équivalentes. C'est moins que les 12 heures de jour : le matin et le soir, le panneau produit peu.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Primitive d'une fonction polynôme.
- Intégrale et aire sous une courbe positive.
- Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.