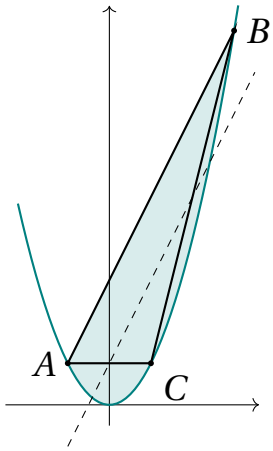
Intégration
Problème de recherche : le gabarit parabolique

Dans un repère orthonormé (unité : le centimètre), on note $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$. Une découpeuse laser fabrique des plaques limitées par $\mathscr{P}$ et par un segment $[AB]$ dont les extrémités A et B sont sur $\mathscr{P}$. Dans chaque plaque, on grave un triangle ABC, où C est le point de $\mathscr{P}$ en lequel la tangente est parallèle à (AB).



La mission

1. Première plaque : $A(-2;4)$ et $B(2;4)$. Déterminer le point C, puis l'aire de la plaque et celle du triangle ABC. Calculer le quotient de ces deux aires.
2. Deuxième plaque : $A(-1;1)$ et $B(3;9)$ (figure ci-dessus). Déterminer une équation de la droite (AB), puis le point C.
3. Calculer l'aire de la deuxième plaque. Avec GeoGebra ou par le calcul, déterminer l'aire du triangle ABC et le quotient des deux aires.
4. Choisir une autre plaque et émettre une conjecture.

Pour aller plus loin

On prend $A(a;a^2)$ et $B(b;b^2)$ avec $a < b$. Démontrer que l'aire de la plaque vaut $\dfrac{(b-a)^3}{6}$.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Première plaque

(AB) est horizontale ; la tangente en C doit l'être aussi, donc $C(0;0)$ (sommet de la parabole).

Aire de la plaque : $\displaystyle\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,\mathrm{d}x = \left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{3}-\left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3} \approx 10{,}67 \text{ cm}^2$.

Triangle : base $AB = 4$, hauteur 4, aire $\frac{4\times4}{2} = 8$ cm^2. Quotient : $\frac{32/3}{8} = \frac{4}{3}$.

2. Deuxième plaque : le point C

Coefficient directeur de (AB) : $\frac{9-1}{3-(-1)} = 2$; $(AB) : y = 2x+3$.

La tangente en un point d'abscisse x a pour coefficient directeur $2x$; $2x = 2$ donne $x = 1$, donc $C(1;1)$.

3. Deuxième plaque : les aires

Sur $[-1;3]$, la droite est au-dessus de la parabole, donc l'aire de la plaque vaut

$$\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x^2+3x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3} = 9-\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ cm}^2.$$

Triangle : le point de (AB) d'abscisse 1 est $D(1;5)$ et $CD = 4$. Le triangle ABC est formé de deux triangles ACD et BCD de base commune $[CD]$, de « hauteurs » horizontales 2 et 2 : aire $\frac{4\times2}{2}+\frac{4\times2}{2} = 8$ cm^2 (GeoGebra donne aussi 8). Le quotient vaut encore $\frac{4}{3}$.

4. Conjecture

Par exemple avec $A(0;0)$ et $B(2;4)$: $C(1;1)$, aire de la plaque $\frac{4}{3}$, aire du triangle 1.

On conjecture que **l'aire de la plaque vaut toujours $\frac{4}{3}$ de l'aire du triangle** ABC.

Ce résultat est dû à Archimède (IIIe siècle avant notre ère), dans son traité *La Quadrature de la parabole*.

Pour aller plus loin

(AB) a pour coefficient directeur $\frac{b^2-a^2}{b-a} = a+b$ et pour équation $y = (a+b)x-ab$.

On vérifie que $(a+b)x-ab-x^2 = (x-a)(b-x) \geqslant 0$ sur $[a;b]$. Une primitive de $-x^2+(a+b)x-ab$ est $G(x) = -\frac{x^3}{3}+\frac{(a+b)x^2}{2}-abx$, et

$$G(b)-G(a) = -\frac{b^3-a^3}{3}+\frac{(a+b)(b^2-a^2)}{2}-ab(b-a).$$

En factorisant par $(b-a)$, avec $b^3-a^3 = (b-a)(a^2+ab+b^2)$ et $b^2-a^2 = (b-a)(a+b)$:

$$G(b)-G(a) = \frac{b-a}{6}\Big(-2(a^2+ab+b^2)+3(a+b)^2-6ab\Big) = \frac{(b-a)^3}{6}.$$

Ce qu'on a utilisé du chapitre

— Primitive d'une fonction polynôme.

— Aire du domaine compris entre deux courbes.