Logarithmes
Problème de recherche : le bruit de l'atelier

L'intensité sonore I (en W/m²) d'un bruit est très difficile à manipuler : elle varie de 10^{-12} (seuil d'audition) à 1 (seuil de douleur). On utilise donc le **niveau sonore** L, en décibels (dB) :

$$L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad \text{avec } I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2.$$

Lorsque plusieurs machines fonctionnent en même temps, ce sont leurs **intensités** qui s'additionnent (et non leurs niveaux sonores).
Dans un atelier, chaque presse produit à elle seule un niveau sonore de 80 dB au poste de travail. La réglementation impose de protéger les salariés dès que le niveau sonore dépasse 85 dB sur une journée de 8 heures.

La mission

1. Un apprenti affirme : « Avec deux presses, on arrive à 160 dB. » Quel est le niveau sonore réel ?
2. Combien de presses, au maximum, peut-on faire fonctionner en même temps sans dépasser 85 dB ?
3. L'atelier doit faire tourner 6 presses. On place sur chaque presse un capot qui diminue son niveau sonore. De combien de décibels chaque capot doit-il au moins réduire le niveau d'une presse pour respecter la limite de 85 dB ? Par combien l'intensité sonore d'une presse est-elle alors divisée ?

Pour aller plus loin

Montrer que chaque fois qu'on multiplie l'intensité par 2, le niveau sonore augmente d'environ 3 dB, quel que soit le niveau de départ. Combien de décibels gagne-t-on en multipliant l'intensité par 10 ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Deux presses

Une presse : $10\log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = 80$, donc $\frac{I_1}{I_0} = 10^8$ et $I_1 = 10^{-4}$ W/m².

Deux presses : intensité $2I_1$, donc $L = 10\log\left(\frac{2I_1}{I_0}\right) = 10\log 2 + 10\log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = 10\log 2 + 80 \approx 83$ dB.

Le niveau ne double pas : il augmente seulement d'environ 3 dB. **L'apprenti a tort.**

2. Nombre maximal de presses

Avec n presses : $L_n = 10\log\left(\frac{nI_1}{I_0}\right) = 80 + 10\log n$.

$$L_n \leqslant 85 \iff 10\log n \leqslant 5 \iff \log n \leqslant 0{,}5 \iff n \leqslant 10^{0{,}5} \approx 3{,}16.$$

On peut faire fonctionner **au maximum 3 presses** ($L_3 \approx 84{,}8$ dB et $L_4 \approx 86{,}0$ dB).

3. Les capots

Soit ℓ le niveau d'une presse capotée. Avec 6 presses : $\ell + 10\log 6 \leqslant 85$, donc $\ell \leqslant 85 - 10\log 6 \approx 77{,}2$ dB.

Chaque capot doit réduire le niveau d'au moins $80 - 77{,}2 = 2{,}8$ dB (on arrondit : 3 dB par sécurité).

Une baisse de 2,8 dB correspond à une intensité divisée par $10^{0{,}28} \approx 1{,}9$; avec 3 dB, elle est divisée par environ 2. En effet, il faut que 6 presses capotées ne fassent pas plus de bruit que 3 presses sans capot : l'intensité de chaque presse doit être divisée par 2.

Pour aller plus loin

$10\log\left(\frac{2I}{I_0}\right) = 10\log 2 + 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \approx L + 3{,}01$: on ajoute toujours environ 3 dB. De même, multiplier l'intensité par 10 ajoute exactement $10\log 10 = 10$ dB. C'est tout l'intérêt de l'échelle logarithmique : les multiplications deviennent des additions.

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Logarithme décimal : $\log(ab) = \log a + \log b$, $\log(10^n) = n$.
- Résoudre une inéquation avec le logarithme ($\log x \leqslant c \iff x \leqslant 10^c$).