Probabilités conditionnelles
Problème de recherche : le test qui se trompe

Une usine fabrique des cartes électroniques sur deux lignes de production :

— la ligne A fournit 60 % des cartes, et 2 % de ses cartes sont défectueuses ;

— la ligne B fournit le reste, et 5 % de ses cartes sont défectueuses.

En fin de chaîne, chaque carte passe sur un banc de test automatique. Ce banc n'est pas parfait :

— une carte défectueuse est rejetée dans 95 % des cas ;

— une carte en bon état est rejetée par erreur dans 3 % des cas.

La mission

1. Quelle est la proportion de cartes défectueuses dans la production totale ?
2. Le responsable qualité affirme : « Le banc est fiable à 95 %, donc quand il rejette une carte, elle est défectueuse dans 95 % des cas. » Qu'en penser ?
3. Parmi les cartes acceptées par le banc, quelle est la proportion de cartes défectueuses ? Le banc est-il utile ?

Pour aller plus loin

Un technicien propose de faire passer chaque carte deux fois sur le banc (les deux tests étant indépendants) et de ne rejeter une carte que si elle est rejetée les deux fois. Quels sont les avantages et les inconvénients de cette méthode ?

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

On note A : « la carte vient de la ligne A », D : « la carte est défectueuse », R : « la carte est rejetée par le banc ».

1. Proportion de cartes défectueuses

Formule des probabilités totales : $P(D) = P(A)P_A(D) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(D) = 0{,}6 \times 0{,}02 + 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}032$.

3,2 % des cartes sont défectueuses.

2. Que vaut un rejet ?

On cherche $P_R(D)$, et non $P_D(R) = 0{,}95$. Arbre : D (0,032) puis R (0,95) ; $\overline{D}$ (0,968) puis R (0,03).

$$P(R) = 0{,}032 \times 0{,}95 + 0{,}968 \times 0{,}03 = 0{,}0304 + 0{,}02904 = 0{,}05944.$$

$$P_R(D) = \frac{P(D \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}0304}{0{,}05944} \approx 0{,}511.$$

Le responsable se trompe : seulement 51 % environ des cartes rejetées sont défectueuses. Les bonnes cartes sont si nombreuses que 3 % d'entre elles représentent presque autant de cartes que les vraies défectueuses détectées.

3. Les cartes acceptées

$P(\overline{R}) = 1 - 0{,}05944 = 0{,}94056$ et $P(D \cap \overline{R}) = 0{,}032 \times 0{,}05 = 0{,}0016$, donc

$$P_{\overline{R}}(D) = \frac{0{,}0016}{0{,}94056} \approx 0{,}0017.$$

Parmi les cartes acceptées, il n'y a plus que 0,17 % environ de cartes défectueuses, contre 3,2 % au départ : **le banc est très utile** pour la qualité des cartes livrées. Son défaut est de jeter beaucoup de bonnes cartes (on peut les re-tester).

Pour aller plus loin

Rejet après deux tests : $P(R_1 \cap R_2) = 0{,}032 \times 0{,}95^2 + 0{,}968 \times 0{,}03^2 \approx 0{,}02975$, et $P_{R_1 \cap R_2}(D) = \frac{0{,}02888}{0{,}02975} \approx 0{,}971$: une carte rejetée est presque toujours défectueuse (avantage : on jette très peu de bonnes cartes). En revanche, une carte défectueuse passe si l'un des deux tests la laisse passer : parmi les cartes acceptées, la proportion de défectueuses monte à environ $\frac{0{,}032 \times 0{,}0975}{1 - 0{,}02975} \approx 0{,}32$ % (inconvénient).

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Arbre pondéré ; formule des probabilités totales.
- Probabilité conditionnelle $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$; ne pas confondre $P_R(D)$ et $P_D(R)$.