Probabilités conditionnelles
Problème de recherche : le diagnostic de la panne

Dans un garage, les voitures qui refusent de démarrer ont trois causes possibles :

— la batterie (événement B) dans 50 % des cas ;
— le démarreur (événement D) dans 30 % des cas ;
— une autre cause (événement A) dans 20 % des cas.

On note V l'événement « les voyants du tableau de bord sont faibles ou éteints ».
On sait que $P_B(V) = 0{,}9$, $P_D(V) = 0{,}1$ et $P_A(V) = 0{,}3$.

La mission

1. Quelle est la probabilité qu'une voiture en panne ait des voyants faibles ou éteints ?
2. Les voyants d'une voiture en panne sont éteints. Quelle cause le garagiste doit-il vérifier en premier ?
3. Les voyants d'une autre voiture en panne s'allument normalement. Le garagiste affirme : « La batterie est la cause la plus fréquente, je commence toujours par elle. » A-t-il raison dans ce cas ?

Pour aller plus loin

Tester la batterie prend 5 minutes et tester le démarreur 20 minutes ; on ne cherche une autre cause qu'après ces deux tests. Pour une voiture dont les voyants sont normaux, comparer le temps moyen passé en tests selon que l'on commence par la batterie ou par le démarreur.

Coups de pouce

Bloqué ? Des indices progressifs sont disponibles en ligne. N'en ouvrir qu'un à la fois, et seulement après avoir cherché !

Éléments de correction

1. Voyants faibles

Formule des probabilités totales :

$$P(V) = 0{,}5 \times 0{,}9 + 0{,}3 \times 0{,}1 + 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}45 + 0{,}03 + 0{,}06 = 0{,}54.$$

2. Voyants éteints

$P_V(B) = \frac{0{,}45}{0{,}54} \approx 0{,}833$; $P_V(D) = \frac{0{,}03}{0{,}54} \approx 0{,}056$; $P_V(A) = \frac{0{,}06}{0{,}54} \approx 0{,}111$.
La batterie est de loin la cause la plus probable : il faut la vérifier en premier.

3. Voyants normaux

$P(\overline{V}) = 0{,}46$; $P(B \cap \overline{V}) = 0{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}05$, $P(D \cap \overline{V}) = 0{,}3 \times 0{,}9 = 0{,}27$, $P(A \cap \overline{V}) = 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}14$.

$$P_{\overline{V}}(B) \approx 0{,}109, \qquad P_{\overline{V}}(D) \approx 0{,}587, \qquad P_{\overline{V}}(A) \approx 0{,}304.$$

Le garagiste a tort : quand les voyants sont normaux, c'est le démarreur qui est le plus probable, et la batterie devient la cause la moins probable.

Pour aller plus loin

Batterie d'abord : 5 min si c'est la batterie, sinon 25 min. Temps moyen : $0{,}109 \times 5 + 0{,}891 \times 25 \approx 22{,}8$ min.
Démarreur d'abord : 20 min si c'est le démarreur, sinon 25 min. Temps moyen : $0{,}587 \times 20 + 0{,}413 \times 25 \approx 22{,}1$ min.
Commencer par le démarreur fait gagner un peu de temps en moyenne, mais l'écart est faible car le test de la batterie est très rapide. (Avec des voyants éteints, en revanche, commencer par la batterie donne environ 8,3 min contre 24,7 min.)

Ce qu'on a utilisé du chapitre

- Arbre pondéré à trois branches.
- Formule des probabilités totales.
- Probabilités conditionnelles et prise de décision.